

CONCEPTS ABSTRAITS ET QUANTITES NUMERIQUES^(*)

par

A. Connes

(Professeur au Collège de France)

Mon but, aujourd'hui, est d'essayer d'expliquer mon point de vue, sûrement partiel, sur le rôle que l'abstraction mathématique pure peut avoir dans la compréhension de quantités numériques très concrètes qui apparaissent en physique. Disons qu'en mathématiques, il y a deux sources inépuisables de phénomènes à l'état brut qui sont, d'un côté, l'arithmétique, et, d'un autre, la physique. Pour prendre un exemple concret, on constate que les nombres 8 et 9 sont des puissances et sont des nombres qui se suivent. On ne sait pas démontrer mathématiquement, que 8 et 9 sont les seuls nombres consécutifs qui soient des puissances. On constate aussi que nous vivons dans un espace géométrique à trois dimensions, dans l'espace-temps à quatre dimensions - ce nombre, on ne sait toujours pas l'expliquer-. Pour être un petit peu plus spécifique, en physique, il y a un nombre bien connu qu'on appelle la constante de structure fine, qui est un nombre sans dimension, valant approximativement $1/137$, et qui apparaît comme une constante fondamentale dans l'électrodynamique quantique. Eh bien ce nombre, on ne sait pas l'expliquer mathématiquement, on ne sait pas en trouver une formule simple, on ne sait pas du tout le comprendre.

Donc, ces deux sujets, aussi bien l'arithmétique que la physique, abondent en phénomènes qui sont des phénomènes bruts. Une des difficultés premières, lorsqu'on rencontre un phénomène de ce type, est d'essayer de l'intégrer harmonieusement dans une théorie. Tant qu'on n'a pas réussi à poser le problème sous une forme telle que, pour le poser, il ne faille pas faire des contorsions, de telle sorte qu'il se pose harmonieusement à l'intérieur d'une théorie, on peut dire qu'on a peu de chances de le résoudre. Les succès récents concernant le problème de Fermat, dus en particulier à K. Ribet, permettent, effectivement, de formuler ce problème de telle sorte qu'il s'intègre très harmonieusement à une théorie. Disons qu'en général, ces phénomènes bruts sont un test pour notre compréhension soit de la théorie des nombres, soit de l'espace, en un sens que je voudrais

(*) Le texte de cette conférence paraîtra dans le livre du Professeur Alain Connes intitulé : *Réflexions sur l'espace. Géométrie et algèbre non commutative* (© InterEditions, 1989).

essayer d'expliciter davantage, selon lequel la physique des interactions, des quatre interactions fondamentales, a pour but ultime de comprendre l'espace ou l'espace-temps dans lequel nous vivons.

Je voudrais ici, en prenant un exemple, essayer d'expliquer à quel point l'idée suivante est une idée fausse. C'est l'idée selon laquelle les seules mathématiques dont le physicien a besoin sont d'un niveau d'abstraction facile, relevant - disons grosso modo - de l'algèbre élémentaire. L'on pourrait essayer de la justifier en disant que, comme le but ultime de la physique est de produire des quantités numériques, de produire des nombres, eh bien, le physicien... le vrai physicien n'a que faire des sophistications mathématiques.

De mon point de vue, cette idée est une idée fausse, et elle limite considérablement le rayonnement possible de notre discipline. Donc, mon but principal sera d'essayer de décrire en détail un exemple - qui est un exemple entre d'autres, que je citerai simplement parce que je le connais mieux - et qui montre à quel point des mathématiques apparemment très abstraites peuvent donner une compréhension considérable de nombres qui ont un rapport avec la réalité expérimentale de la physique.

Mon texte sera divisé en trois parties. Je vais commencer par expliquer un théorème assez ancien de géométrie, mais qui est à l'origine d'une idée mathématique laquelle a eu de nombreux avatars, et s'est développée sous des formes très différentes. Je pense qu'il est important d'expliquer le théorème qui est à l'origine de cette idée. Je décrirai ensuite assez simplement les résultats expérimentaux et je montrerai enfin - ce n'est pas moi qui suis parvenu à ce résultat mais un physicien théoricien, Jean Bellissard - j'expliquerai comment on peut arriver à comprendre ces résultats expérimentaux grâce à une théorie. Cette troisième partie de mon texte sera essentiellement basée sur l'algèbre, elle sera beaucoup plus algébrique que les deux premières parties. La première partie sera assez géométrique, la deuxième sera l'exposé des résultats de physique.

Je vais commencer par la première partie, essayer d'expliquer un théorème ancien, le théorème de Gauss Bonnet. C'est un théorème qu'on peut très bien visualiser, et qui a trait à la théorie des surfaces. Donc, je vais parler de surfaces dans l'espace \mathbb{R}^3 . Pour fixer les idées, je vais donner un exemple concret d'une telle surface (fig. 1) tracée dans l'espace \mathbb{R}^3 ; on essaie de la comprendre, de l'étudier, et la notion fondamentale qui apparaît est celle de courbure. En fait, cette notion

est encore plus facile à comprendre en dimension 1 lorsqu'on s'intéresse à des courbes planes. Je vais donc commencer par vous rappeler ce qu'est la courbure d'une courbe plane, et ensuite nous passerons aux surfaces.

Σ SURFACE DANS \mathbb{R}^3

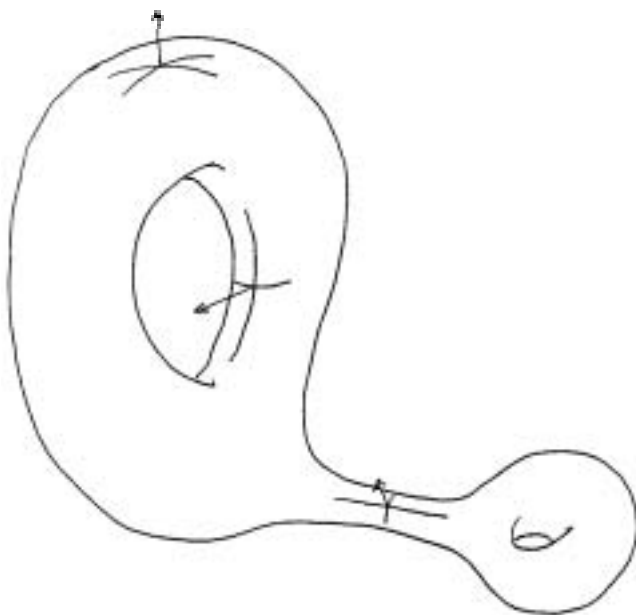
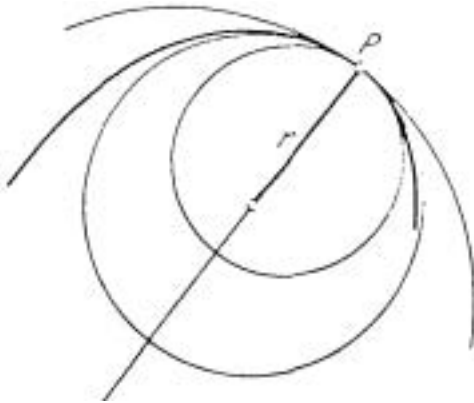


Figure 1.

Si l'on regarde une courbe plane, comme celle tracée en traits gras et passant par le point P sur la figure 2, on s'aperçoit que parmi les cercles qui ressemblent à la courbe au voisinage du point P , il y en a un dont le centre est toujours situé sur la normale à la courbe passant par P , et qui en un sens convenable a trois points communs avec la courbe, épouse la courbe le mieux possible au voisinage de P . Ce cercle a un centre qui est donc sur la normale au point P et un rayon qu'on appelle le rayon de courbure de la courbe au point P . Ce qu'on appelle la courbure (on a envie que la courbure soit d'autant plus grande que la courbe est plus courbée), c'est l'inverse du rayon de courbure.



RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE
COURBURE : $K = 1/R$

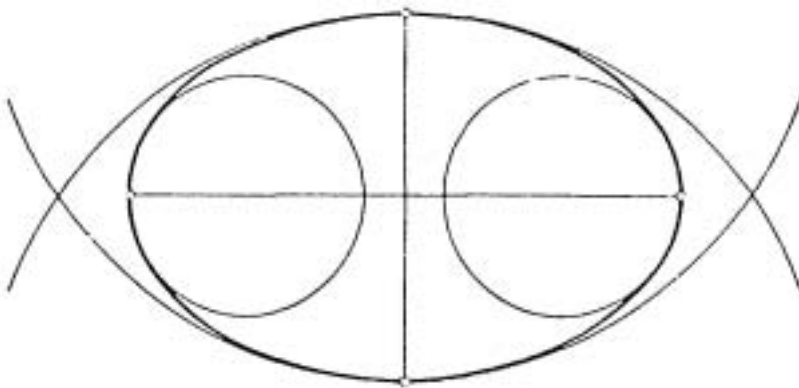
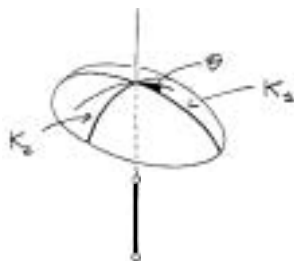


Figure 2.

Donc, elle est définie par l'égalité $K = \frac{1}{R}$.

Maintenant, revenons au cas des surfaces. Par un point P de la surface on peut tracer la normale à la surface et pour réduire la dimension de 1, couper la surface par un plan qui passe par cette normale. Lorsqu'on intersecte la surface par un plan passant par la normale, on obtient une courbe plane. Mais, bien sûr, cette courbe plane va avoir un rayon de courbure au point P, et ce rayon de courbure n'a aucune raison d'être le même lorsqu'on change le plan

passant par la normale. Evidemment, pour une sphère qui est bien symétrique, c'est vrai, on a toujours le même rayon de courbure, mais vous voyez très bien dans les deux dessins qui sont ici (fig. 3) que, dans le cas de la calotte, on aura deux courbures différentes, K_1 K_2 , et dans le cas de la forme d'une selle de cheval, on voit bien qu'il y aura même un plan passant par la normale dans lequel on aura une courbure nulle. C'est dire que la courbure, si on lui donne un signe, change de signe entre ses deux extrêmes. Il y a un vieux théorème, dû à Euler, qui dit qu'en fait on n'a pas besoin de connaître les courbures de tous les plans passant par la normale pour connaître la situation. Il suffit de connaître ses deux extrêmes, K_1 et K_2 ,



$$\text{EULER : } K_\theta = K_1 \cos^2\theta + K_2 \sin^2\theta$$

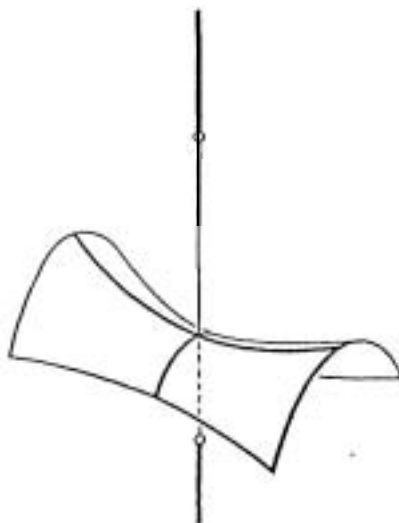


Figure 3.

Ils sont atteints pour deux plans qui sont perpendiculaires, et lorsqu'on coupe la surface par un plan passant par la normale mais faisant un angle θ avec l'un des deux extrêmes, la formule (fig. 3) due à Euler donne la valeur de la courbure de cette intersection.

Le théorème dont je voulais parler est le théorème de Gauss Bonnet. Il dit la chose suivante : considérons ce qu'on appelle la courbure totale au point P c'est-à-dire le produit $R = K_1 K_2$ des courbures K_1 et K_2 . Lorsqu'on intègre $R(P)$, lorsqu'on fait la somme sur toute la surface de ces courbures totales $R(P)$, on obtient un nombre très particulier parce que d'une part c'est un multiple entier de 2π mais d'autre part ce nombre, bien qu'il soit calculé comme une somme de nombres, comme une intégrale, a une propriété tout à fait extraordinaire, il a la propriété d'être un nombre stable.



EXEMPLE $K_1 = 0$

$$R = K_1 K_2$$

COURBURE DE GAUSS

THEOREME (GAUSS BONNET)

$$\int_{\Sigma} R \, dS = (2-2g)2\pi$$

ENTIER

Figure 4.

Qu'est-ce que j'entends par là ? C'est que bien que ce nombre soit défini avec beaucoup de paramètres il ne dépend pas de leur choix ; en fait, si vous voulez, il y a une infinité de paramètres qui

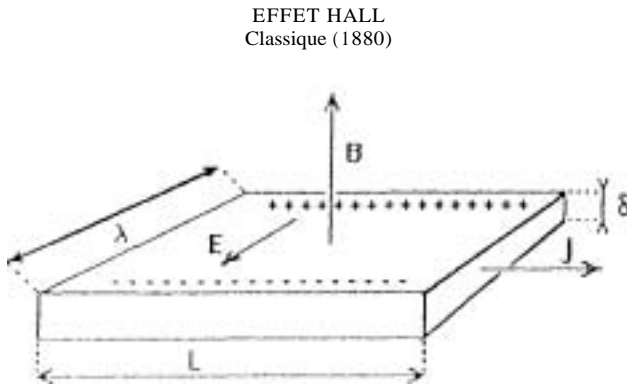
sont à notre disposition, puisqu'on peut, par exemple, prendre la surface en question, et on peut lui faire une petite bosse à un endroit. Pensez à une surface plus simple que la surface de la figure 1, pensez à la surface de la Terre. Eh bien, chaque fois que l'on fait une petite bosse ce que dit le théorème en particulier, c'est qu'en faisant cette petite bosse, on introduit exactement autant de courbure positive que de courbure négative. C'est-à-dire qu'en faisant cette petite bosse, on introduit au sommet de la bosse de la courbure positive, puisqu'à cet endroit-là les courbures K_1 K_2 sont dans le même sens, mais le long de la bosse, on est dans la situation d'une selle de cheval et à ces endroits là la courbure $R=K_1K_2$ est négative. Donc vous voyez ce qui se passe, c'est qu'on obtient effectivement un nombre en faisant cette intégrale, mais ce nombre a une propriété tout à fait extraordinaire, ce n'est pas l'intégrale de n'importe quelle fonction, c'est un nombre qui, lorsqu'on modifie légèrement la surface, ou lorsqu'on la modifie vraiment, mais sans changer sa nature topologique, ne change pas. L'idée que je vais essayer de soutenir, par un exemple bien entendu, c'est que lorsqu'un nombre a cette qualité, il a une signification beaucoup plus grande qu'un nombre ordinaire. En fait un espoir important, c'est que certaines des quantités physiques qui ont vraiment une signification fondamentale sont des nombres qui se calculent par une méthode de ce type et qui ont une signification topologique, une propriété de stabilité par déformation.

Revenons à l'énoncé du théorème de Gauss-Bonnet : l'intégrale sur toute la surface de la courbure $R = K_1K_2$ est un multiple entier de 2π de la forme $2(1-g) \times 2\pi$ où g est un entier positif qui s'appelle le genre de la surface - Ce nombre caractérise le type topologique de la surface en question. Par exemple, si l'on revient donc à la figure 1, c'est un exemple de surface de genre 2. Le genre, si vous voulez, mesure le nombre de trous dans la surface. Pour un tore, il y a un seul trou, pour une sphère il n'y en a pas et ainsi de suite.

Je voudrais maintenant expliquer les résultats de physique expérimentale qui, éventuellement, seront reliés à ce que j'ai dit ici. Je ne parle pas de la démonstration du théorème, j'y reviendrai plus tard, et je passe directement, donc, à un problème de physique.

Ce problème de physique, c'est ce qu'on appelle "l'effet Hall". L'effet Hall classique remonte à 1880 et concerne l'expérience suivante. On considère une feuille métallique plane, extrêmement fine, qui est formée d'un métal conducteur, et ensuite on s'arrange pour imposer un champ électromagnétique B perpendiculaire à cette

feuille (fig. 5). Les électrons placés dans le plan sont alors soumis à une force, la force de Lorentz, qui est perpendiculaire à leur vitesse. Et donc, en fait, en général ils vont décrire des cercles. Ces cercles sont analogues à ceux que l'on voit dans toutes les images d'accélérateurs.



$$E = V_H / \lambda \quad V_H = \text{VOLTAGE HALL}$$

CONDUCTIVE HALL :

$$\sigma_H = j/E = Ne c/B$$

$$(Ne E + j \wedge \frac{B}{c} = 0)$$

$$+F_{\text{elec}} + F_{\text{magn.}}$$

Figure 5.

Le premier intérêt de l'effet Hall classique qui a été découvert en 1880, est le suivant. Il y a un signe, un signe + ou -, que l'on appelle le "signe des porteurs de charge" et qui est une caractéristique du métal. Par exemple, ce signe est + pour le fer, est - pour l'or, ou le

cuivre, c'est un signe qui dépend du métal que l'on considère. C'est une caractéristique de ce métal. Traitons le problème de manière classique. Il y a un certain nombre d'électrons qui réalisent la conduction dans le métal plan, et l'on écrit la règle d'équilibre des forces auxquelles un petit élément de surface est soumis. En appelant N la densité des électrons ou des porteurs de charge (en général il vaut mieux parler de porteurs de charge parce que, justement, lorsque le signe est $+$, le transport des charges est effectué par des trous d'électrons, non par des électrons), la contribution du champ électrique à la force en question est donnée par NeE , où e est la charge élémentaire du porteur et E la différence de potentiel entre les deux côtés (voir figure 5).

La force électromagnétique est le produit extérieur du courant j par le vecteur qui représente le champ électromagnétique perpendiculaire. La règle d'équilibre est donc : $NeE + j \wedge B = 0$ (fig. 5). Elle implique évidemment qu'il y a une différence de potentiel dans le sens perpendiculaire au courant. Selon les expériences, on impose le courant dans une certaine direction ou on impose la différence de potentiel, mais enfin, peu importe, il y a toujours cette relation entre e et B et cette relation permet de définir la conductivité Hall ou, en prenant l'inverse, la résistance du système ; la conductivité est définie comme étant le quotient entre les valeurs absolues du courant et de E — ou du voltage $V = \lambda E$ peu importe, tout dépend de quoi on veut parler — Cette conductivité Hall a plusieurs propriétés remarquables, en particulier elle est proportionnelle au nombre de porteurs de charge.

Comme je le disais plus haut, il y a une deuxième chose très importante, c'est que, en fait, dans cette équation (fig. 5), il y a un signe qui s'introduit. C'est-à-dire, selon les métaux, la différence de potentiel sera dans un sens ou dans l'autre, et, au départ, la conductivité Hall a été utilisée — la conductivité Hall classique — dans des expériences, pour savoir si un métal appartenait au signe $+$ ou au signe $-$. Et c'était le premier moyen de savoir si la conductivité s'effectue par des électrons, comme dans l'or par exemple, ou par des trous d'électrons, comme dans le fer.

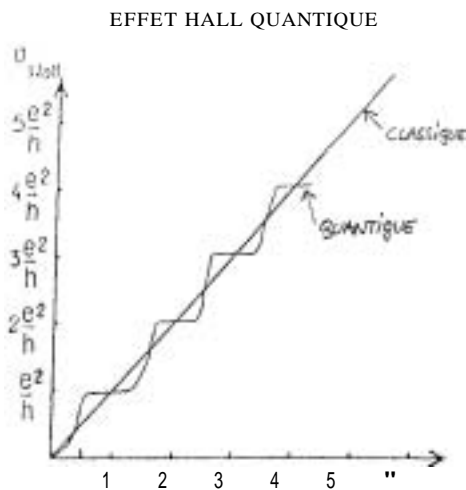
Cent ans plus tard, en 1980, trois physiciens, Von Klitzing, Peppes et Dorda ont réussi à mettre au point un dispositif qui permet de réaliser l'expérience de la conductivité Hall en dehors du régime classique. Pour rappeler un petit peu de thermodynamique, on a découvert la mécanique quantique à partir du moment où on a réussi à

sortir du régime classique, du régime des températures assez grandes. On s'est aperçu que, lorsqu'on descend à des basses températures, les résultats obtenus pour le rayonnement des corps noirs par exemple ne sont plus en accord avec les formules que l'on obtient par la physique classique. Mais évidemment, dans le cas présent, dans le cas de l'effet Hall, il était difficile de réaliser l'expérience dans les régimes non classiques. Il y a plusieurs raisons à cela : il faut des champs électromagnétiques extrêmement forts, des températures très basses et de plus une idée théorique qui permette de trouver un plan, quelque chose qui soit exactement un plan et qui soit conducteur (au lieu d'être réalisé sous la forme d'une feuille métallique très fine, c'est un dispositif expérimental extrêmement compliqué, avec un contact entre deux matériaux différents, contact qui se fait exactement sur un plan).

Tout ceci a été réalisé expérimentalement, et on est arrivé à la constatation suivante : contrairement à ce qu'on avait vu dans le cas classique, on n'a plus du tout la proportionnalité entre la conductivité Hall, et la densité N des porteurs de charge. Techniquement, on utilise le niveau de Fermi v au lieu de N .

L'on constate que lorsqu'on varie ce paramètre ν , il se produit des plateaux, c'est-à-dire qu'il y a certaines valeurs, certaines bandes de valeurs du paramètre ν pour lesquelles la conductivité Hall reste constante, ne change pas. Il y a une explication simple : lorsque vous accroissez dans ces plateaux (fig. 6) le paramètre ν les seuls états nouveaux que vous introduisez sont des états liés du système qui ne participent pas à la conductivité et donc la conductivité est exactement stationnaire. Mais, ce qui est beaucoup plus extraordinaire, c'est que, lorsqu'on mesure la conductivité Hall dans un de ces plateaux en utilisant l'unité e^2/h de conductivité, on trouve un entier à 10^{-8} près. C'est-à-dire que l'on trouve un nombre qui est, à la précision expérimentale que l'on connaît, vraiment un nombre entier : on obtient sept décimales qui donnent un nombre entier. On constate ainsi que, à condition de passer en dehors du régime classique, on découvre un phénomène d'intégralité qui est de nature quantique (il faut bien voir que dans le mot "quantique", évidemment, il y a déjà cette notion d'intégralité). Ici, la précision est telle qu'elle conduirait à prendre comme étalon de la résistivité la quantité donnée par l'effet Hall quantique.

Le problème que je veux discuter maintenant, et qui a été à mon sens résolu de la manière la plus conceptuelle par un physicien théoricien qui s'appelle Jean Bellissard, c'est celui de donner une



VON KLITZING, PEPPER, DORDA 1980

Figure 6.

explication théorique à ce phénomène expérimental, de comprendre les nombres qui apparaissent, et de comprendre également pourquoi on a affaire à un entier, etc. Je vais donc tenter d'expliquer ce que Jean Bellissard a trouvé et, pour ce faire, il faut auparavant que je libère un petit peu l'idée sous-jacente au théorème de Gauss Bonnet. Une idée a toujours plusieurs facettes et peut donner toutes sortes d'avatars possibles ; ce que je veux faire, c'est essayer de l'exprimer sous une forme essentiellement algébrique. En réalité, je veux dire la chose suivante : au lieu de faire jouer un rôle fondamental à la vision géométrique du problème (évidemment, on peut avoir une intuition géométrique et une compréhension géométrique complètement immédiate du théorème de Gauss Bonnet), ce que je vais essayer de faire, c'est de comprendre ce théorème en utilisant uniquement l'algèbre qui est l'algèbre des coordonnées de cette surface. Pour vous

donner un exemple d'une démarche analogue, supposez qu'on vous pose comme problème celui tout à fait élémentaire de démontrer que les trois médianes d'un triangle s'intersectent, se coupent en un même point. Il y a deux manières de procéder : soit d'une manière purement géométrique, en trouvant une démonstration élégante qui aboutisse au résultat ; soit en disant ceci : pourquoi ne pas calculer en coordonnées et démontrer que ça marche ? Evidemment, les deux ont une certaine valeur, mais l'avantage de la seconde méthode, qui est une méthode de calcul direct, d'algèbre, c'est qu'elle se prête immédiatement à passer en dimension plus grande. Si on passe en dimension supérieure, on aura moins l'intuition géométrique, la perception immédiate de ce qu'il faut faire au niveau géométrique pour démontrer un théorème. Mais s'il s'agit de faire des calculs, et des calculs élémentaires, on aura toutes les chances de le faire après avoir formulé correctement la démonstration dans un cas simple. C'est exactement ce que je vais faire ici. L'algèbre que je vais utiliser ne sera plus simplement l'algèbre de deux ou trois coordonnées comme on le fait lorsqu'on manipule des triangles dans le plan, ce sera une algèbre un petit peu plus compliquée : l'algèbre des fonctions sur cette surface.

Je vais énoncer un théorème. Ne soyez pas effrayés par son énoncé (fig. 7), c'est un théorème très simple à démontrer pourvu que l'on s'habitue à l'idée, justement, qu'il faut manipuler des algèbres. Pour les gens qui ne savent pas ce que c'est qu'une algèbre, pensez à des quantités que l'on manipule, dont on peut faire la somme et le produit. Les règles que l'on suppose sont les règles de l'algèbre ordinaire. Il y a une seule règle qu'en général on n'aura pas besoin de supposer, et la physique nous enseigne qu'il ne faut surtout pas la supposer, c'est la règle de permutabilité, de commutativité du produit. C'est-à-dire, lorsque l'on donnera un produit, il faudra donner l'ordre des facteurs, l'ordre des termes dans lequel on fait ce produit, par exemple le produit AB ne sera pas en général égal au produit BA.

Voici donc un petit théorème d'algèbre qui se place dans ce cadre général et dont, ensuite, je donnerai de nombreux exemples. On suppose que chaque fois qu'on se donne trois éléments a^0, a^1, a^2 de l'algèbre on sait leur associer un nombre $\tau(a^0, a^1, a^2)$. Par exemple prenons pour algèbre, celle des fonctions sur la surface Σ de la fig. 1. Etant données trois fonctions a^0, a^1, a^2 on peut associer à chaque point P de la surface trois coordonnées $a_0(P), a_1(P), a_2(P)$. Cela permet non plus de regarder cette surface abstraitement, mais de regarder chacun de ses points comme point de \mathbb{R}^3 . On peut alors calculer le volume de

ALGÈBRE

THEOREME : A algèbre, τ fonctionnelle trilinéaire telle que :

- a) $\tau(a^0, a^1, a^2) = \tau(a^1, a^2, a^0) \quad a' \in A$
 b) $r(a^0 a^1, a^2, a^3) - r(a^0, a^1 a^2, a^3) + r(a^0, a^1, a^2 a^3) - r(a^3 a^0, a^1, a^2) = 0$
 $a' \in A$

Alors $e \in \text{Proj } A \rightarrow \tau(e, e, e)$ est invariant par homotopie.

Exemple 1.

- $A =$ algèbre des coordonnées sur Σ

- $e \in M_2(A)$ donné par l'application normale $P \rightarrow n(P) \in S^2 \subset M_2(\mathbb{C})$

- $r(a^0, a^1, a^2) = \int_{\Sigma} a^0 da^1 \wedge da^2 = \text{Volume } a(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$

Figure 7.

l'intérieur, en l'affectant du signe $+$ ou $-$ selon que l'orientation est la bonne ou pas. Cette fonctionnelle $\tau(a^0, a^1, a^2)$ est le prototype de la quantité que je veux regarder. Donc partons d'une fonctionnelle τ , de trois variables, a_0, a_1, a_2 , éléments de l'algèbre, qui vérifient les relations a) et b) du théorème : la deuxième relation est une relation qui est un peu compliquée, peut-être, à comprendre, mais qui signifie simplement qu'il y a une compatibilité de cette fonctionnelle non seulement avec l'addition, mais aussi avec le produit.

Le théorème dit la chose suivante : soit e une quantité qu'on appelle un projecteur, ou idempotent, qui a la propriété d'être égale à son carré, $e^2=e$. Lorsque vous appliquez la fonctionnelle en mettant les trois arguments a^0, a^1, a^2 égaux à e , vous obtenez un nombre qui a cette remarquable propriété de stabilité. C'est-à-dire un nombre qui lorsque vous changez e , lorsque vous le déformez de manière continue, ne va pas changer, va rester stable.

Je vais commencer par l'appliquer à l'exemple de la surface dont j'ai parlé plus haut, et on va essayer de faire l'effort de ne plus voir cette surface géométriquement mais d'y penser à travers l'algèbre des coordonnées. Arrêtons-nous là-dessus : cette démarche est celle que les physiciens ont inventée de manière absolument remarquable. Heisenberg y a été contraint par la mécanique quantique, et je vais expliquer en quelques mots pourquoi, en quel sens, ce processus s'est imposé à lui. Disons que la physique du XIXe siècle avait habitué justement à traiter un système physique par ce qu'on appelle les quantités observables. Si, par exemple, vous considérez un système mécanique qui a un certain nombre de degrés de liberté, vous pouvez spécifier un état du système en spécifiant les quantités observables telles que les coordonnées ou les vitesses.

Ainsi, les physiciens se sont habitués en mécanique à penser à l'ensemble des états possibles du système, mais à manipuler constamment, en faisant leurs calculs, les observables, les fonctions sur l'ensemble des états du système et qui sont toujours à valeur numérique, à valeur réelle. Ceci était suffisant pour faire la mécanique classique et on a pu la formuler de manière extrêmement simple à l'aide de ces objets.

Ensuite, Heisenberg, qui était quelqu'un d'extrêmement pragmatique, d'extrêmement proche de l'expérience, s'est aperçu que lorsqu'on voulait traiter des systèmes quantiques, on était mis, à cause de la réalité expérimentale, à cause de la règle de combinaison de Rydberg, devant une évidence : les quantités observables, les quantités de la physique, n'étaient plus comme des fonctions, des quantités qui commutent entre elles, mais comme des quantités qu'on appelle des matrices, et qui ne commutent plus. Mais, peu importe, elles peuvent être codifiées, on peut leur donner un nom et en fait, on peut donner des noms classiques à des quantités qui ne sont plus classiques, telles que le moment dipolaire, la position, etc. Les règles qui régissent l'algèbre de ces quantités sont changées, la principale étant la commutativité, qui n'est plus vérifiée.

Revenons maintenant aux surfaces et considérons l'algèbre des coordonnées sur une surface. Alors que, dans cette algèbre elle-même, il y a peu d'éléments qui soient vraiment intéressants, vraiment particuliers, dès que l'on se permet de prendre des matrices 2×2 sur cette algèbre et de les multiplier entre elles, il y a un élément particulier e qui est un projecteur ($e^2=e$), et qui est donné par l'application normale. (fig. 8).

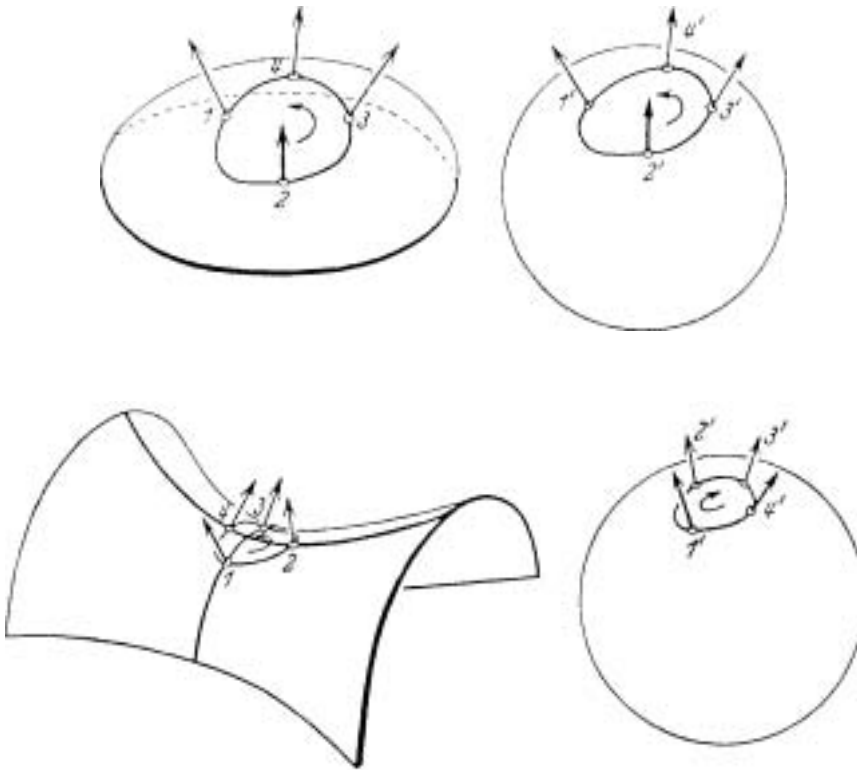


Figure 8.

Cette application associe à tout point P de la surface un point de la sphère unité, et le vecteur normal en ce point de la surface. Et - je pense que la figure parle d'elle-même - elle montre bien la différence qu'il y a entre le cas où la courbure totale est positive (on a quelque chose qui a la forme d'une sphère) et le cas où on a quelque chose qui a la forme d'une selle de cheval : dans le dernier cas l'application normale change l'orientation. En fait on peut voir cette application normale d'un point de vue très géométrique, - et c'est important pour commencer, pour comprendre quelque chose au début - mais on peut aussi la voir d'un point de vue algébrique. Comme un point de $S^2 = P_1(\mathbb{C})$ est une matrice 2×2 particulière, l'application normale est un élément e de l'algèbre des matrices 2×2 de fonctions.

De plus e a cette propriété remarquable dont j'ai parlé tout à l'heure d'être un projecteur. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème à la fonctionnelle τ que j'ai décrite ci-dessus.

Donc je dis simplement qu'il y a moyen de comprendre le théorème de Gauss Bonnet à travers une vision purement algébrique, c'est-à-dire en oubliant vraiment le point de départ géométrique et en traduisant tout algébriquement. Quel est l'avantage de ce procédé ? Il permet d'appliquer exactement le même résultat, le même théorème à un cas qui est infiniment plus difficile à maîtriser si l'on voulait en avoir une image visuelle et une image géométrique. Par contre, si on veut travailler avec des quantités que l'on a à multiplier, et pour lesquelles on veut définir des règles algébriques, il n'y a aucune difficulté à faire des calculs et il n'y a aucune difficulté à définir l'algèbre que l'on considère.

L'exemple est le suivant. C'est une algèbre qui va représenter, si on essayait de la voir de manière visuelle, une généralisation de ce qu'on appelle les courbes elliptiques. D'habitude, pour les courbes elliptiques, il y a un seul module - ici il va y avoir un module supplémentaire, un nombre θ , qui est un angle. Le fait que cet angle soit rationnel ou pas, que ce nombre ait ou non de bonnes approximations diophantiennes ont jouer des rôles absolument fondamentaux. Je vais décrire cette algèbre de telle sorte que vous puissiez faire des calculs avec un ordinateur par exemple. Je donne un nom U et V pour les deux générateurs de cette algèbre et la seule règle (qui remplace la commutativité) est la suivante :

$$VU = (\exp(2\pi i\theta))UV.$$

Tout élément de l'algèbre s'écrit alors comme une série double $\sum a_{n,m} U^n V^m$ où les $a_{n,m}$ sont des nombres complexes.

La règle algébrique, la seule qui compte, c'est celle qui est donnée ici ; et une fois qu'on a cette règle, on peut faire tous les calculs algébriques qui sont nécessaires. Quand θ est irrationnel contrairement au cas commutatif, on n'a pas besoin de passer aux matrices sur l'algèbre pour trouver des projecteurs non triviaux. Dans le cas usuel, si vous prenez une fonction assez régulière sur une surface, l'image de cette fonction est un connexe, c'est-à-dire un intervalle dans \mathbb{R} , toujours. Mais, lorsque vous regardez cette algèbre-là et que vous essayez de chercher ce qu'est l'image d'une fonction, c'est le spectre d'un élément autoadjoint de l'algèbre. En

général, ce qui se produit lorsque θ est suffisamment irrationnel, c'est que ce spectre est un ensemble totalement discontinu, c'est-à-dire un ensemble de Cantor. En gros, cela veut dire que si vous cherchez à voir une image visuelle de ce qu'est l'espace en question, vous obtiendrez un ensemble de Cantor.

En particulier, on peut prendre l'élément auto-adjoint, qui est donné par a fois la partie réelle de U plus b fois la partie réelle de V . Si on prend cet élément T , on peut regarder le projecteur que l'on obtient, justement, en isolant un petit morceau du spectre (fig. 9) ; parce qu'après tout, si un morceau de spectre est isolé, vous pouvez toujours considérer la portion de l'espace en question qui correspond à

Exemple 2

A_θ engendrée par U, V avec :

$$VU = \exp(i2\pi\theta) UV$$

e projecteur spectral de

$$a(U+U^*) + b(V+V^*) = T$$

autour d'un bout de spectre :

$$e = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{T-z}$$

$$\tau(a^0, a^1, a^2) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{tr}(a^0(\delta_1 a^1 \delta_2 a^2 - \delta_2 a^1 \delta_1 a^2))$$

THEOREME

SUR TOUT PROJECTEUR e , $\tau(e, e, e)$ EST UN ENTIER.

Figure 9.

l'image inverse de ce morceau de spectre. On obtient ainsi un projecteur e (qui vérifie l'équation $e^2=e$). Ce qui est tout à fait remarquable, c'est que lorsque l'on prend comme fonctionnelle τ l'analogue exact de la fonctionnelle qui, plus haut, décrivait l'élément de volume, bien que l'on soit dans une situation dans laquelle l'image de l'espace est un ensemble de Cantor, totalement discontinu, bien que l'on soit dans une situation où le nombre 0 est présent partout, lorsque l'on évalue la fonctionnelle sur n'importe quel projecteur, on obtient toujours un nombre entier. Ce phénomène est tout à fait extraordinaire et je me souviens d'avoir fait des calculs, au départ, tout à fait numériques et explicites, sur des exemples, et d'avoir été très étonné de voir que, bien que l'on soit dans une situation qui, *a priori*, est irrationnelle, puisqu'il y a ce nombre irrationnel 0 qui est la donnée de départ, malgré cela, la quantité τ évaluée sur e , du fait peut-être qu'elle a des propriétés de stabilité remarquables, est un nombre entier.

Cet exemple, c'était vraiment le premier balbutiement de géométrie différentielle non commutative qui montrait qu'il se passait quelque chose. Je ne vais pas essayer d'expliquer pourquoi c'est un entier, ce que je vais faire c'est montrer le lien entre ce second exemple et le problème de l'effet Hall quantique, tel qu'il a été expliqué par Jean Bellissard.

Revenons donc au problème de physique dont on parlait plus haut et traitons-le de la manière suivante : on néglige les effets de théorie des champs et on considère le problème comme un problème de thermodynamique en négligeant l'interaction des électrons ou des porteurs de charge entre eux. La statistique étant celle de Fermi-Dirac, on obtient, après des calculs assez compliqués bien entendu, une formule explicite pour la conductivité Hall. Le rôle fondamental dans tous les calculs est joué par l'hamiltonien de la théorie. L'hamiltonien est obtenu en ajoutant à l'opérateur de Dirac le potentiel électromagnétique correspondant au champ électromagnétique. Ce que Bellissard a découvert c'est que cette situation-là cadre exactement avec le théorème précédent pourvu que, maintenant, l'on comprenne quelle est l'algèbre A , quel est le projecteur e et quelle est la fonctionnelle τ .

Ainsi d'abord, quelle est l'algèbre A ? Elle a une signification physique très simple : l'énergie est représentée par un opérateur en mécanique quantique, l'hamiltonien. Le métal que l'on considère est formé d'atomes immobiles situés sur les mailles d'un réseau plan

cristallin, et qui engendrent un potentiel électrostatique, lequel s'ajoute au potentiel électromagnétique créé par le champ B perpendiculaire au plan. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, l'hamiltonien n'est pas invariant par les translations, le système n'est pas entièrement invariant par translation puisque les points du réseau ont une place particulière dans le plan, et le système n'est invariant que par les translations d'ordre entier, celles qui laissent le réseau invariant. Ainsi ce n'est pas l'hamiltonien seul qui est important, ce n'est pas non plus l'énergie individuellement, mais ce sont aussi tous ces translatés, par translation dans le plan. Or ce qui est fondamental, c'est que justement lorsqu'on translate, à cause de ce qu'on appelle la translation magnétique qui introduit une phase, l'hamiltonien translaté ne va pas commuter avec l'hamiltonien de départ. Mais la situation n'est pas inextricable car, si on engendre une algèbre avec les fonctions de l'hamiltonien et de l'hamiltonien translaté, on obtient une algèbre familière qui est exactement l'algèbre A_θ dont j'ai parlé plus haut. Ce nombre θ , a une valeur sans dimension qui est fournie par les données physiques et qui est exactement le flux du champ magnétique à travers une unité du réseau plan que l'on a considéré. Donc, ce nombre a une signification, véritablement, et, en général, ce sera un nombre irrationnel ; il n'y aurait bien entendu aucune raison de supposer que ce nombre soit un nombre rationnel. Ainsi donc, j'ai spécifié quelle était l'algèbre : c'est en un certain sens l'algèbre des quantités physiques qui nous intéressent, c'est-à-dire de l'énergie et des fonctions translattées de celle-ci.

Maintenant, quel est le projecteur e ? Il s'obtient de la manière suivante : on regarde le nombre de porteurs de charge ou — ce qui est une quantité équivalente — ce qu'on appelle le niveau de Fermi, qui intervient lorsqu'on fait de la thermodynamique, et qui est une valeur spécifique de l'énergie. Il se peut que ce niveau d'énergie appartienne ou n'appartienne pas au spectre du Hamiltonien. Ce qui est fondamental c'est qu'il n'appartienne pas au spectre formé d'états non localisés. Et cela correspond exactement dans la figure 6 aux endroits où l'on a un plateau de la conductivité. Cela correspond donc à des régions du spectre du hamiltonien où les seuls états nouveaux que l'on crée en accroissant l'énergie sont des états liés, qui ne contribuent donc pas à la conductivité. Dans cette situation correspondant à un plateau, la valeur de E est en dehors du spectre formé d'états libres. Et ceci permet de faire l'intégrale de Cauchy dont je parlais tout à l'heure autour du spectre, autour de la portion entre O et E , et d'obtenir un projecteur : celui auquel on applique le théorème.

JEAN BELLISSARD

A = algèbre des fonctions du Hamiltonien et ses translats :

$$H = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - e_0 A_j / c$$

e = Projecteur spectral défini par le niveau de Fermi : E

THEOREME

- 1) $A \simeq A_\theta$ où θ est le flux de B par unité de réseau
- 2) La formule de Kubo devient :

$$\sigma_H = \frac{e_0^2}{h} \frac{1}{2i\pi} \text{tr}(e[\delta_1 e, \delta_2 e]) = \frac{e_0^2}{h} \tau(e, e, e)$$

ENTIER

Figure 10

Enfin, il faudrait spécifier cette forme trilinéaire τ qui intervient dans l'énoncé du théorème. Ce qui est miraculeux, c'est qu'il y avait une formule pour la conductivité, la formule de Kubo, et que Bellissard a montré en identifiant l'algèbre des fonctions du hamiltonien et de ses translats avec l'algèbre A_θ qu'elle donne exactement la fonctionnelle τ que j'évoque plus haut, évaluée sur le projecteur e, multipliée par la constante e_0^2/h . La conductivité Hall est une quantité physique, qu'on ne peut pas ne pas voir, puisque l'existence même d'un plateau invite à considérer la valeur de la conductivité pour n'importe quel point de ce plateau sur lequel elle est constante. Le fait expérimental remarquable était que l'on obtenait un entier, à huit décimales près. Grâce à la formule ci-dessus (fig. 10) cela découle de l'intégralité de cette fonctionnelle τ sur les projecteurs de l'algèbre A_θ . Cette intégralité, j'en avais donné une preuve en 1980, mais pas vraiment la bonne explication. Ce que je veux essayer de faire passer d'une certaine manière, c'est que cette intégralité de la

valeur de τ_* en fait, a une raison mathématique qui est une raison assez profonde et qui a ses racines dans ce qu'on appelle le théorème de l'indice.

Essayons de tirer une conclusion de ces constatations. On est amené, à cause des besoins de la physique, ou à cause d'exemples très frappants en mathématiques, à ne pas limiter notre champ d'investigation du point de vue de la géométrie, du point de vue des espaces que nous considérons, mais seulement à des espaces dont l'algèbre des coordonnées est une algèbre commutative. J'ai expliqué plus haut comment Heisenberg avait ouvert la voie et je pense que l'exemple de Bellissard est également très frappant.

A partir du moment où un espace est perçu sous forme d'ensemble de points, il s'ensuit automatiquement que l'algèbre des fonctions sur cet espace est une algèbre commutative. Pourquoi ? Parce qu'une fonction est une application dans les nombres, et les nombres commutent entre eux. Il y a une espèce d'a *priori* selon lequel un espace est formé de points, ce qui revient à limiter le champ de nos investigations à des algèbres commutatives. Cet exemple force à étendre nos notions usuelles, les concepts usuels que nous avons sur un espace, à les étendre au-delà du cadre commutatif. Alors, parmi les concepts les plus utiles, évidemment, il y a les formes différentielles, il y a l'intégration de ces formes différentielles, il y a, si vous voulez, les outils fondamentaux de la géométrie différentielle, par exemple les courants de de Rham, etc. Lorsque l'on s'impose comme contrainte de pouvoir appliquer la théorie non seulement dans le cas commutatif, mais aussi dans le cas non commutatif, on est obligé de repenser, chacune des notions fondamentales auxquelles nous sommes habitués.

Je ne veux pas rentrer dans les détails là-dessus, mais ce qui se produit, c'est qu'on est obligé, lorsqu'on veut démontrer par exemple l'intégralité, d'introduire une notion de forme différentielle différente. Au lieu d'être la notion ordinaire, où une différentielle est définie comme une section du fibré cotangent, ou est définie en différenciant localement une fonction, les formes différentielles sont remplacées par des opérateurs, par des objets quantiques. Et l'entier que l'on obtient est l'indice d'un opérateur. L'intégralité est donc celle de la dimension d'un sous-espace d'un espace de Hilbert.