

PHYSIQUE ET MATHÉMATIENS

PAR

B. Sapoval

Cette table ronde, organisée par B. Sapoval, représente la contribution de la Société Française de Physique aux invitations de la S.M.F. et de la S.M.A.I.

Participants :

L. Michel, Membre de l'Institut I.H.E.S., Bures s/Yvette, Régulateur
U. Frisch, Observatoire de Nice, Intervenant
B. Julia, Ecole Normale Supérieure, Paris, Intervenant
B. Sapoval, Ecole Polytechnique, Palaiseau, Intervenant
J. Peyrière, Université Paris-Sud, Interlocuteur privilégié
J.P. Ramis, IRMA, Université de Strasbourg I, Interlocuteur privilégié

Cette table ronde, dévouée à l'expression de quelques-unes des problématiques entre physique et mathématiques, comprenait trois exposés de physiciens sur lesquels devaient intervenir, outre les membres du Colloque, deux interlocuteurs "privilégiés", J. Peyrière et J.P. Ramis, mathématiciens personnellement impliqués dans des collaborations réelles entre les deux disciplines.

Le sujet étant très vaste nous avons préféré présenter des exemples plutôt que d'essayer de faire le tour du problème très complexe des rapports entre mathématiques et physique. Les exposés ont donc porté sur des exemples :

U. Frisch (Observatoire de Nice)

HYDRODYNAMIQUE ET CRISTALLOGRAPHIE : Un exemple d'interaction entre mathématiques et physique passant par la quatrième dimension.

B. Julia (Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure)

PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES : voir texte joint

1. Pour une répartition des tâches et le renforcement des interactions
2. Pour une harmonisation des programmes d'enseignement

B. Sapoval (Laboratoire de Physique de la Matière Condensée de l'Ecole Polytechnique)

LE POINT DE VUE D'UN EXPERIMENTATEUR : Questions sur le statut du savoir pratique et du savoir mathématique ; La Physique, science active ? Les Mathématiques, sciences réflexives ?

Exemples :

1. la percolation ;
2. la dimension "pertinente" d'un objet réel tel qu'une électrode poreuse dans un accumulateur.

On trouvera la contribution de B. Julia à la suite du résumé des discussions.

1. COMPTE RENDU DE LA DISCUSSION par B. Sapoval

La discussion, coordonnée par Louis Michel, est résumée ici :

Jusqu'à notre époque, les théories physiques ont toutes semblé devoir s'achever en une formulation mathématique rigoureuse, forme ultime et parfaite de leur statut "définitif". De nombreux écrits des plus illustres physiciens attestent cette perception. Cette image simple occulte cependant plusieurs problématiques, et notamment :

1. Les Mathématiques constituent-elles une "boîte à outils" pour le physicien ? Cette perception linéaire des rapports entre les deux sciences ne s'avère pas suffisante de nos jours, même si elle doit continuer à fructifier dans tous les cas où un progrès physique est lié à l'utilisation d'un outil mathématique pré-existant. Souvent, il ne s'agit pas seulement pour le mathématicien de résoudre un modèle physique bien posé. Il s'agit en fait de participer directement à l'élaboration du modèle lui-même.

2. Il semble qu'à cet égard, les échanges entre les hommes soient les plus fructueux. B. Julia nous donne quelques exemples dans son exposé. Ces contacts ne peuvent avoir lieu qu'à travers des membres des deux disciplines qui s'intéressent au langage de l'autre.

3. Le rôle de la rigueur a lui aussi été discuté, surtout au travers de ses implications pédagogiques. En effet, si les physiciens, si les ingénieurs, si les mathématiciens savent "à quoi s'en tenir" sur ce sujet (on peut au moins l'espérer) il n'en est pas de même des écoliers, des lycéens et des étudiants. Pour un esprit qui ne s'est pas encore frotté au réel les attendus "rigoureux" d'un théorème peuvent en masquer le sens profond.

4. Peut-on d'autre part, présenter comme non "vraie" une proposition qui n'est démontrée que dans des cas particuliers simples ?

La rigueur formelle peut se révéler être un obstacle pour les physiciens qui cherchent des outils dans la "boîte à outils", au même titre que le langage juridique pour comprendre le sens d'une décision de justice.

Il apparaît à cet égard que la formation des enseignants de mathématiques serait enrichie par une formation en physique, et même plutôt dans un laboratoire de physique expérimentale. Car lorsque les étudiants mathématiciens s'initient à la mécanique quantique, font-ils de la physique ou en réalité des mathématiques ?

5. La physique est souvent tenue de mettre en oeuvre des concepts approximatifs, en dehors même des problèmes conceptuels soulevés. Des concepts non rigoureusement fondés mais riches de développements sont mis en oeuvre journallement et peuvent finalement se trouver "fondés" par confrontation avec le réel expérimental. Ces connaissances peuvent être à la base de toute une industrie, par exemple certains des éléments de la théorie du transistor. La rigueur de la physique tient plus à sa confrontation constante avec l'expérience qui, pour les physiciens est le seul garant de "vérité", qu'à la rigueur formelle qui reste le garant de la "vérité" mathématique. Rappelons Hegel qui écrit "Seul le réel est rationnel".

6. On discute sur l'exemple de la théorie de la percolation, du statut d'une discipline dans laquelle seuls quelques résultats exacts existent, mais où s'est constitué au fil des années un corpus important de connaissances considérées comme "vraies", ces connaissances étant le résultat de simulations numériques. Ce type de corpus qui ressort de la

théorie des probabilités, devra-t-il être enseigné par des mathématiciens ou par des physiciens ? Il est probable que dans le futur, le nombre de domaines où la connaissance suivra ce schéma augmentera rapidement, compte tenu des applications.

7. Enfin dans l'assistance une question a été posée : "Pourquoi ne pas faire des mathématiques pour des mathématiques ?" La réponse semble être "bien sûr on peut et on doit" mais ceci reste dans un cadre académique et limité. L'importance sociale des mathématiques comme structure de base de nombreuses disciplines ne se ramène pas, et de très loin, aux mathématiques pour les mathématiques ainsi qu'en témoigne l'organisation même de ce Colloque.

II. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUE par B. Julia

Résumé

1. Pour une répartition des rôles et le renforcement des interactions
2. Pour une harmonisation de l'enseignement et la diversification des débouchés.

1. a) Physique théorique et Mathématiques diffèrent. (échelle de temps et finesse de l'analyse)

Nous allons considérer à la fois les disciplines et les personnes contrairement à ce que laisserait envisager le titre de cette table ronde. Les échanges entre les deux disciplines sont en plein renouveau : de l'amont (Mathématiques pures) à l'aval (Physique théorique) mais aussi dans l'autre sens. Tentons de donner une *définition* assez large de la Physique théorique : celle-ci a pour but de modéliser puis d'analyser théoriquement les phénomènes physiques que l'on peut observer expérimentalement. L'analyse de modèles peut précéder leur confirmation expérimentale (et même la découverte des phénomènes physiques correspondants) ; on parle alors de succès de la théorie. Pensons à la déviation de la lumière par le soleil prédite par Einstein en 1916, 3 ans avant la mesure, ou bien plus récemment à la prédiction en 1967 des besoins intermédiaires des interactions électrofaibles découverts en 1983 au CERN.

Toutefois la prédiction ne doit pas anticiper "trop" l'expérience, sinon la Physique théorique devient des Mathématiques. Nous verrons plus loin que les équations de Maxwell ne furent confirmées qu'en 1885 avec 20 ans de retard. Par contre la supersymétrie date de 1970

environ alors que le traité de **Grassmann** qui en contient les prémices date de 1844.

La sanction du physicien théoricien est le succès de son calcul, mais son raisonnement doit être "correct". S'il n'est pas toujours rigoureux le bon physicien doit être convaincant. Il le sera si les approximations qu'il doit faire sont réputées vénielles et si les imprécisions de son raisonnement n'empêchent pas d'arriver au bon résultat dans d'autres problèmes mieux compris.

Mais ...

- et c'est une différence essentielle avec les Mathématiciens - le calcul doit conduire au résultat mesuré ! On pourra objecter que l'absence de rigueur est dangereuse, mais l'efficacité oblige souvent à ne pas attendre la disponibilité des techniques nécessaires à une rigueur absolue. La différence entre bons et mauvais physiciens se mesure peu à peu à leur succès. Ils doivent néanmoins formuler clairement les hypothèses utilisées. On peut voir dans cette nécessité de "coller" à l'expérience l'origine des modes qui galvanisent l'univers des physiciens. Le dur contact avec la matière est aussi source de créativité, le physicien désespéré sera amené à inventer de nouveaux outils et la légèreté de son bagage permettra peut-être à son imagination plus d'excès ! (au cours de l'exposé on m'a objecté que la dureté de l'exigence de rigueur pouvait être également féconde et moins dangereuse s'il y a impossibilité d'une vérification expérimentale) mais ceci m'amène à la précision de l'analyse.

La deuxième différence importante est celle des points de vue ou plutôt des grossissements. Lorsque le physicien théoricien aborde un domaine nouveau mal connu et un problème mal formulé, il a besoin d'outils rustiques et maniables. Un problème des télescopes les plus puissants actuellement est que l'on ne peut pas faire d'exploration systématique du ciel, il faut savoir où regarder ; avec les derniers accélérateurs de particules il est très fastidieux de faire varier l'énergie pas à pas. Avec les outils mathématiques le physicien théoricien à un problème analogue : il doit également commencer par utiliser la cavalerie légère, celle-ci ne suffit pas toujours à épuiser le problème mais elle permet de l'identifier et de l'étudier, et cela donne les premiers résultats physiques intéressants.

Un mathématicien fait aussi une étude préliminaire et superficielle quand il travaille dans son propre domaine, mais il ne s'arrête pas là au 20ème siècle (il n'en a pas toujours été ainsi). Pour

réussir en Physique aujourd'hui il semble crucial d'avoir un spectre de connaissances très large pour pouvoir reconnaître les mathématiques potentiellement utiles. En fait l'existence de bonnes encyclopédies de Mathématiques permet de remplacer l'érudition par une connaissance approfondie des structures et une capacité d'apprentissage juvénile. Dans un second temps *ce* sera au collègue mathématicien de raffiner éventuellement l'analyse, et même quelquefois de perfectionner ses outils pour y parvenir ce qui est après tout le but des Mathématiques pures.

Enfin précisons notre but : nous avons essayé de distinguer une activité de type Mathématique et une de type Physique théorique. Le mot modélisation est **ambigü** : le choix ou l'invention de lois qui s'appliquent à telle ou telle situation c'est de la Physique, mais le traitement exact ou numérique de précision de ces équations c'est plutôt des Mathématiques. Les deux tâches sont différentes et requièrent des qualités différentes, des hommes différents, ce qui n'exclut pas les chassés-croisés (Harish-Chandra et F. Dyson par exemple). Enfin un Mathématicien peut réussir très bien en Physique et inversement.

A titre d'illustration, le programme mentionné par M. Lions : les gaz raréfiés et le passage de l'équation de Boltzmann à celle de Navier-Stokes, me semble nécessiter une réflexion physique avant une étude de Mathématiques appliquées. Quant aux mathématiciens qui se lancent dans la Physique ils méritent l'aide des physiciens dans le respect mutuel.

1. b) Les interactions.

Ceci nous amène aux différentes sortes d'interactions entre les disciplines. Nous avons bien sûr parlé des Mathématiques outil des physiciens, il y a aussi l'inspiration que peut fournir la Physique à un Mathématicien. Les exemples sont légion : la gravitation Newtonienne, la théorie des vibrations et celle de la propagation de la chaleur (équations aux **dérivées** partielles), la mécanique quantique (Analyse fonctionnelle). Plus récemment la théorie de la supersymétrie est née vers 1970 de la théorie de **Grassmann** (1944) et celle-ci a illuminé les théorèmes de l'indice, enfin les solutions "instantons" des équations de Yang-Mills qui généralisent les équations de Maxwell ont permis à Donaldson de démontrer l'existence d'un espace R^4 anormal, résolvant ainsi un vieux et difficile problème de Mathématiques en dimension 4 (une des dimensions délicates !).

Comment se passent les échanges ? Ils font intervenir des personnes avant tout. La collaboration entre Marcel Grossmann et Albert Einstein qui conduisit à la Relativité Générale et stimula les progrès de la géométrie différentielle fut marquée par une nette séparation des rôles : le premier expliqua la géométrie riemannienne et formalisa les arguments physiques du second, d'après A. Mais il refusa même la responsabilité des arguments physiques par honnêteté. Il y a d'autres modes d'interaction bien sûr. L'amitié entre Wigner et von Neumann permit au premier de classer les représentations du groupe de Poincaré, et ce travail ainsi que celui du physicien Barmann ouvrirent une voie dans la théorie des représentations des groupes de Lie non-compacts. Le mouvement Brownien nous vient de la botanique, passe par la physique (Perrin, Einstein) est formalisé par N. Wiener. Un saut est fait par Feynman dans l'heuristique mais ô combien fructueux. La définition mathématique de ses intégrales de chemin est un des problèmes les plus urgents et les plus difficiles. Elles sont importantes en théorie des probabilités.

Je voudrais illustrer la synergie des deux disciplines par une révolution tranquille des dix dernières années qui a son origine vingt ans plus tôt séparément en Physique (modèles de cordes duales) et en mathématiques (algèbres de **Kac-Moody**, ce sont des algèbres de Lie de dimension infinie très proches de celles de dimension finie). A la fin des années soixante les physiciens ont étudié des modèles de cordes relativistes pour comprendre les interactions nucléaires. Ils ont été conduits à définir des opérateurs dits de *vertex* qui ont une structure mathématique nouvelle mais une interprétation physique très simple au moins pour l'opérateur de *vertex* qui représente la collision par leur bout de 2 cordes dont l'une est réduite à un point.

A peu près à la même époque et doublement indépendamment, un Canadien et un Russe inventaient les algèbres de **Kac-Moody**. Un problème difficile est la construction explicite de leurs représentations : les opérateurs de vertex se sont révélés être l'outil idéal ! Il est peut-être utile de comprendre comment le transfert de technologie a pu s'effectuer. Je ne citerai que des personnes dont je connais la contribution. H. Garland **coorganisateur** avec les physiciens de Yale de séminaires sur les cordes dix ans auparavant, a reconnu des opérateurs cousins de ceux des physiciens en Mathématiques et a permis la percée de I. Frenkel et de V. **Kac** qui ont effectivement fait la traduction et utilisé les opérateurs des physiciens. Signalons que ces deux Mathématiciens sont des Soviétiques émigrés qui ont eu une formation supérieure en Physique théorique. D'autres applications des

opérateurs de *vertex* à la théorie des groupes finis (le Monstre) et à la Physique (l'équivalence Eison-Fermion) sont dues à des mathématiciens qui de longue date s'étaient intéressés à la Physique : G. Segal, M. Sato, I. Frenkel, etc.

Quelles conclusions tirer de ces exemples ? La Physique est une source d'inspiration constante des Mathématiques (ceci est mentionné dans le texte d'A. Connes et par J.P. Ramis). Il est donc bon que de nombreux Mathématiciens la connaissent. On peut suggérer un bagage minimal en Licence : un cours de Mécanique quantique à un nombre fini de degrés de liberté, et un cours de Mécanique statistique avec les notions de limite thermodynamique et de limite hydrodynamique. Ceci servirait aux professeurs du secondaire également.

Mais il y a une deuxième difficulté de relation entre physiciens et mathématiciens. Elle a été résolue par quelques frontaliers mais eux-mêmes ont du mal à jouer leur rôle de relais de l'information. Supposons que les mathématiciens dans leur ensemble admettent le principe de reconnaître des connaissances heuristiques déjà acceptées par les physiciens. Ils auront du mal à les évaluer si les physiciens ne font pas des efforts de codification de leur langage. Inversement les mathématiciens devraient décoder leurs théorèmes en pensant aux utilisateurs, peut-être en revenant à une pédagogie par l'exemple.

Enfin toute initiative de rapprochement géographique de physiciens et de mathématiciens est à encourager : bibliothèque de Physique et de Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, actions communes SMF-SFP, création d'une fédération des sciences exactes dont un des buts serait le décloisonnement des cerveaux etc...

Pour conclure cette partie je m'inspirerai de F. Dyson (BAMS de Sept. 1972 : Occasions manquées). Celui-ci rend J.C. Maxwell responsable par sa modestie du manque d'intérêt de ses contemporains mathématiciens pour ses équations qui sont invariantes de Lorentz, et invariantes par action du groupe conforme. Cette timidité aurait-elle fait perdre quarante ans ?

2. L'enseignement et les débouchés

Pour former ces deux catégories différentes de chercheurs faut-il des enseignements différents ? Oui, mais certainement pas disjoints. En effet la différence entre un mathématicien et un

physicien s'annule à la frontière des domaines. Peut-être les enseignements ne devraient-ils donc pas rester aussi séparés qu'aujourd'hui.

Je ne parlerai pas de l'enseignement supérieur qui souffre de ses DEA cloisonnés et de ses filières étanches. Mais je voudrais poser le problème des outils mathématiques nécessaires pour faire de la physique moderne. Et déjà dans l'enseignement des classes préparatoires de lycée le problème saute aux yeux. Je suis loin d'être un spécialiste mais j'ai fait quatre observations. Les méthodes asymptotiques sont maintenant au programme de Mathématiques, et c'est fondamental pour la Physique. D'autre part on traite aussi de problèmes non-linéaires (globaux) par-ci par-là, mais on pourrait insister par exemple dans le cours de Physique sur l'approximation linéaire et des effets proprement non-linéaires (attracteurs). Les probabilités brillent par leur absence malgré leur énorme importance dans de nombreux domaines d'activité et en particulier en Physique (méthodes d'optimisation par Monte-Carlo amélioré). Et enfin on assiste à l'émergence des Mathématiques discrètes après quelques siècles de calcul infinitésimal. Ceci est dû à l'informatique bien sûr mais aussi à l'attaque de problèmes discrets en physique par exemple. J'ai appris à ce colloque qu'une maîtrise de Mathématiques discrètes avait même été créée à Lyon, je vais aller voir. Ce n'est pas le lieu pour faire des propositions concernant les programmes de physique, mais le fait que la Physique inspire des Mathématiques difficiles se paie et l'enseignement de théories modernes de Physique est très délicat sans ces outils mathématiques avancés.

Les débouchés. Là encore je serai bref par force. Je voudrais simplement faire une remarque qui concernait à l'origine les physiciens théoriciens, mais qui s'applique telle quelle aux mathématiciens. Si un chercheur moyen veut former plus d'un étudiant à la recherche, ce qui veut dire que ceux-ci passeront une thèse, il faut que les industriels ou autres employeurs reconnaissent cette formation et les embauchent sans les pénaliser. Preuve : sinon on n'arrivera jamais à créer de flux de sortie, le nombre de postes d'enseignants chercheurs en régime de croisière étant peu élastique on formerait des chômeurs. Corollaire : il faudrait sans doute prévoir des carrières originales plutôt de réflexion et d'analyse que de contact pour utiliser ces compétences de chercheurs. Elles n'existent pas au-dessus d'un certain niveau : il faut passer dans l'administration pour progresser.

CONCLUSIONS

Je terminerai par deux citations légèrement provocantes. D'abord R. Feynman physicien de Caltech et peu porté à la rigueur a dit :

"Il y a beaucoup plus de choses vraies que de choses démontrables"

J. Hadamard dans un autre registre a écrit :

"Il est important que celui qui veut découvrir ne se cantonne pas à un chapitre de la science mais qu'il garde le contact avec les autres"

Il aurait apprécié l'époque actuelle.