UN EXEMPLE DE DEBAT EN MATHEMATIQUES : L'ANALYSE NON STANDARD

par

Francine Diener

Université Paris X

"Au colloque 'Avenir des Mathématiques' qui s'est tenu les 9 et 10 décembre à l'Ecole Polytechnique à Palaiseau, il a été beaucoup question de l'Analyse Non Standard." Cette phrase parue dans Le *Monde* au lendemain du colloque reflète bien la réalité. Bien qu'il n'y ait encore qu'une cinquantaine de mathématiciens en France qui utilisent ce nouveau calcul infinitésimal, et bien que les avis restent partagés dans la communauté mathématique sur son intérêt, il est certain que le sujet a été largement débattu, bien au-delà de la table ronde qui lui était consacrée.

A cette table ronde, le public est venu nombreux, environ 135 personnes dans l'amphithéâtre Carnot. La première partie fut consacrée aux interventions des invités, Pierre Cartier (CMAT, Ecole Polytechnique), Claude Lobry (Université de Nice), Jean Mawhin (Université de Louvain) et Georges Reeb (Université de Strasbourg). Les résumés de ces interventions, distribués aux participants, ont été reproduits ci-dessous. On pourra lire également un court extrait du livre *The problems of mathematics* de I. Stewart (Warwick), également invité, mais qui n'a pas pu prendre part à la table ronde pour des raisons de calendrier.

Je me propose de rendre compte à présent de la seconde partie de la table ronde consacrée aux questions des participants. On retiendra surtout du débat le fait que les participants sont venus là en majorité pour s'informer, mieux connaître le sujet, ses difficultés d'approche, son avenir. Le fait marquant fut donc la grand curiosité du public.

Parmi les questions abordées, plusieurs concernaient l'existence d'approches différentes de l'Analyse Non Standard, révèlant quelques inquiétudes sur la plus ou moins grande compatibilité entre elles. *"L'Analyse Non Standard,* a demandé *H.* Cartan, *est-elle aujourd'hui formalisée avec suffisamment de précision pour que deux mathématiciens qui la pratiquent (de manière indépendante) soient nécessairement d'accord sur la solution de tel ou tel problème ?"*. La réponse est affirmative, bien entendu ! L'analyse non standard de Abraham Robinson est parfaitement formalisée, et c'est ce qui en fait la supériorité incontestable sur les précédentes tentatives de fondation d'un calcul infinitésimal. Elle s'inscrit dans le cadre des mathématiques usuelles et non en contradiction avec elles. En particulier tous les théorèmes classiques restent vrais. Et s'il existe des différences d'approches entre les équipes de non standardistes, elles ne sont que le reflet ici des clivages usuels entre mathématiciens, plus ou moins formalistes ou plus ou moins géomètres par exemple, mais cela ne concerne que la présentation que l'on en donne. Un spécialiste de théorie de la mesure et un probabiliste peuvent présenter des résultats de façons fort différentes sans qu'il puisse y avoir pour autant de conflits entre eux sur leur exactitude ; il en va de même entre deux non standardistes.

P. Cartier a indiqué brièvement quelles sont les approches les plus connues : celle de A. Robinson, inventeur de la méthode (1966), qui se situe dans le cadre de la théorie des modèles (approche prépondérante parmi les équipes de non standardistes nord américaines), celle de E. Nelson qui est une présentation purement axiomatique (adoptée par plusieurs équipes françaises), celle de G. Reeb plutôt intuitionniste dont il nous a entretenus brièvement (les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$) et celle de P. Cartier plutôt finitaire suggérée par Nelson dans son dernier livre et par l'école tchèque de Vopenka. Lorsque l'on analyse la situation du point de vue de l'utilisateur, la cohabitation entre les diverses approches est tout à fait bonne : il ne fait pas de doute qu'elles offrent diverses façons de voir le même calcul infinitésimal. J. Mawhin a également tenu à souligner qu'il n'y a pas que des inconvénients à disposer de plusieurs approches : *"Il est toujours enrichissant,* a-t-il précisé, *pour comprendre une théorie mathématique, de voir les choses de plusieurs points de vue différents, c'est même souvent indispensable si on veut vraiment comprendre. Un nouvel outil ne chasse pas nécessairement les autres, il s'ajoute aux autres. Et pour l'infini, par exemple, il vaut mieux avoir plusieurs façons de le voir, même si l'une d'entre elles est 'finitaire' ! "*.

Plusieurs participants ont souhaité avoir des informations sur l'ampleur réelle des résultats obtenus par ces nouvelles méthodes et sur leurs domaines d'application privilégiés. Il est devenu difficile aujourd'hui de dresser, dans le temps d'une conférence, un portrait complet de ce qui a été fait, au moyen des méthodes non standard, depuis la parution du livre de A. Robinson en 1966, tant les domaines des mathématiques concernés sont variés et les résultats nombreux : on a relevé, pour réaliser l'un des panneaux de l'exposition non standard visible dans le hall de l'Ecole Polytechnique, plus de 750 articles ayant fait l'objet d'un résumé au *Mathematical Reviews* et la liste n'est certainement pas exhaustive. Et s'il est vrai que, dans les premières années, on s'est beaucoup employé à traduire dans ce nouveau formalisme les outils mathématiques classiques - probablement pour tester leur "compatibilité ascendante" et "mesurer" les simplifications qu'il apportait - on a accompli depuis des progrès substantiels dans de nombreux domaines allant de la physique mathématique à la théorie des probabilités, en passant par celle des équations différentielles ou par l'économie mathématique. Ceci inclut non seulement des théorèmes originaux dans des théories classiques mais également la découverte de phénomènes nouveaux. *"Prétendre en* 1987, a dit C. Lobry, *que l'Analyse Non Standard ne permet que de retrouver des résultats classiques est tout simplement contraire aux faits*[1]) ; *il faut en finir avec cette idée reçue".*

Parmi les domaines pour lesquels on peut attendre des percées non standard, on a cité à titre d'exemples, les problèmes asymptotiques, où interviennent plusieurs échelles de grandeurs, en particulier l'homogénéisation, les approximations numériques et les problèmes d'arrondis dans le calcul digital (les ordinateurs font des erreurs très petites, mais un nombre très grand d'opérations). Il faut noter cependant, comme l'a fait P. Cartier que *"s'il est évident que ce sont là des champs privilégiés pour l'Analyse Non Standard, le travail reste à faire".* Et il n'y a pas de doute que si l'on veut réellement donner sa chance à ces nouvelles méthodes et les voir se généraliser, il faudra se donner des moyens, à la fois humains et matériels. G. Reeb à son tour a défendu une politique d'investissement dans ce domaine : *"Je crois,* a-t-il souligné, *que ce matin Monsieur Choquet a dit une chose à laquelle on peut adhérer, en tout cas c'est*

1) A l'appui de cette affirmation, voir la monographie *Analyse non standard et théorie des bifurcations* (C. Lobry) (Université de Nice *1987).*

ma conviction : << ça vaut la peine que des gens s'attellent à cela[1]) >>. Ce que l'on peut garantir à un jeune c'est qu'en aucun cas il ne compromet ce faisant son éducation classique de mathématiques ; c'est sans danger et c'est évident que ça vaut le coup !".

Une autre question largement débattue fut de savoir si l'Analyse Non Standard pouvait effectivement présenter des avantages dans le domaine de l'enseignement, en particulier pour l'enseignement des mathématiques aux non mathématiciens. Ce point a son importance si l'on pense que l'un des défis que l'on aura à relever dans les années à venir sera d'enseigner plus de mathématiques à un grand nombre de non mathématiciens. L'Analyse Non Standard aura son rôle à jouer parce qu'elle permet de définir certains objets mathématiques ou concepts d'une façon extrêmement proche de leur expression heuristique. *"Une marche aléatoire de pas infinitésimale par exemple,* disait C. Lobry pour illustrer cette approche à la fois constructive et intuitive, *est un objet suffisamment riche pour contenir tout ce dont on peut avoir besoin pour faire une théorie mathématique du mouvement brownien. L'avantage de cet objet sur un processus de Wiener sur IR est que sa définition est triviale ; dans ce type d'approche les objets existent de façon naturelle et simple ; c'est la première chose que l'on peut demander à un objet mathématique. Ensuite pour dire quelque chose de pertinent sur cet objet, il faudra peut-être montrer qu'il a une ombre, c'est-à-dire une approximatioiz continue. Mais on ne le fera que si c'est utile, pour faciliter les calculs par exemple. Ainsi on définit les objets dans le discret et on calcule dans le continu. Le continu est une bonne approximation du réel".*

A la question de F. Larene *"Peut-on enseigner l'Analyse Non Standard ex nihilo sans enseigner au préalable les mathématiques standard ?,* il a été répondu qu'on peut aujourd'hui envisager d'enseigner l'Analyse Non Standard à divers niveaux, y compris à l'occasion d'un cours d'introduction à l'analyse, et ce d'autant plus facilement sans doute s'il s'agit d'un premier cours sur le sujet. Plusieurs expériences ont été faites ; elles sont concluantes et il n'est pas déraisonnable de penser que d'ici quelques années les enseignements d'analyse et plus spécialement ceux destinés aux utilisateurs des mathématiques, contiendront un aspect infinitésimal. C. Kipnis a souhaité quelques précisions sur la faisabilité de ce type

---

1) Evoque une intervention faite par G. Choquet le matin même en séance pleinière, à la suite de l'exposé de J.L. Lions.

d'enseignement : *"La grande difficulté, semble-t-il pour accéder au non standard est la somme de logique qu'il faut ingurgiter avant. De même que les règles de manipulation des réels sont clairement codifiées (attention 1/0 est interdit !) peut-on trouver une somme de règles à utiliser, et qui font l'unanimité des non standardistes, pour ne pas faire de fautes logiques".* La nécessité de bonnes connaissances de logique est l'une de ces idées reçues provenant d'une confusion entre l'origine de la méthode, effectivement issue des travaux des logiciens du début du siècle, et sa pratique. C'est un peu comme de prétendre que pour bien manipuler le principe de récurrence il faut connaître la théorie axiomatique des ensembles. Les présentations modernes de l'Analyse Non Standard ne demandent pas plus de connaissances de logique qu'un cours de mathématiques usuel. On est passé heureusement du "langage machine" à des "langages plus évolués" ; un petit nombre de règles simples (3 dans la présentation axiomatique de E. Nelson, par exemple) suffisent à codifier complètement la méthode.

Dans son intervention initiale, C. Lobry avait présenté l'Analyse Non Standard comme une chance de réconciliation entre mathématiciens et physiciens. Ce point a été repris et commenté : c'est évidemment, chacun en est convaincu, un enjeu important. Levith a rappelé que E. Nelson, tout comme A. Robinson, est autant physicien que mathématicien et qu'en ce sens l'Analyse Non Standard est un peu née de la physique. Le mathématicien dispose à travers elle d'une possibilité d'interpréter dans son univers à lui et avec les critères de rigueur qui lui sont propres, les discours des physiciens ou plus généralement des utilisateurs des mathématiques, sans qu'il soit besoin d'inventer des voix détournées, ou du moins perçues comme telles, pour y parvenir. Espérons, comme B. Jacob, que ce soit là un moyen de réconcilier étudiants ou futurs ingénieurs avec certaines théories mathématiques telles que le calcul des probabilités par exemple.

En conclusion, ce débat a montré qu'en 1987, il est possible de parler, nombreux, durant une heure et demi de ce sujet de façon positive. L'analyse non standard a 20 ans aujourd'hui et on dispose de suffisamment de recul pour se prononcer sur ses chances de développement. Beaucoup l'ont fait au cours de ce colloque, en particulier dans trois autres tables rondes. Parions avec eux qu'elle aura un rôle important à jouer dans les mathématiques à venir.

I. LA METHODE INFINITESIMALE EN ANALYSE
par Jean Mawhin

Pendant plus de 250 ans, le calcul différentiel et intégral s'est développé selon deux voies parallèles : la méthode infinitésimale et la méthode des limites. Leibnitz fut l'avocat de la méthode infinitésimale tandis que Newton, après avoir utilisé une approche cinématique, a tenté d'exprimer la dérivée comme limite d'un quotient différentiel. Le manque de rigueur des deux présentations a donné lieu très tôt à de vives polémiques.

Si l'analyse des Bernoulli et d'Euler est essentiellement infinitésimale, et si Lagrange tenta en vain de construire une analyse entièrement algébrique, d'Alembert va préconiser, dans l'Encyclopédie, un fondement du calcul différentiel et intégral sur la méthode des limites. C'est Cauchy qui va réellement réaliser ce programme et mettre la notion de limite à la base de l'analyse, sans toutefois éliminer le langage des infiniment petits : il subordonne ces derniers à la notion de limite en les définissant comme des variables qui ont pour limite zéro. Jusqu'à l'avènement et la diffusion de la rigueur weierstrassienne, et même après, les traités d'analyse continueront à mentionner à la fois l'approche infinitésimale (en général, mais pas toujours, dans la version de Cauchy)[1]. En Belgique,

---

1) "Le mode d'exposition du calcul infinitésimal que l'on a adopté, est celui indiqué par Landen et d'Alembert, et qui est fourni par la considération des limites. Cette méthode a sur sa rivale, la méthode des infiniment petits, l'immense avantage de la rigueur et de l'exactitude qui manquent complètement à l'autre, puisque la première n'applique les règles de l'arithmétique et de l'algèbre qu'à des quantités finies et par conséquent saisissables à l'esprit, tandis que l'autre admet gratuitement que ces mêmes règles sont encore vraies quand on considère des quantités sans grandeur appréciable, et qui, par conséquent, échappent à nos sens et à notre intelligence.

On a donc cherché à déduire du seul principe des limites, d'une manière méthodique et uniforme, toutes les propositions fondamentales du calcul différentiel; mais l'ancienne méthode de Leibnitz présente de trop grands avantages sous le rapport de la brièveté et de la simplicité pour qu'on ait cru pouvoir s'abstenir de la faire connaître ; c'est pourquoi la plupart des démonstrations un peu importantes sont doubles, l'une destinée à convaincre l'esprit, et l'autre, à le soulager et à mieux se graver dans la mémoire. Il arrive même quelquefois, lorsque la réduction aux limites ne présente aucune difficulté, que l'on s'est borné à une démonstration au XIXe siècle, les querelles entre "infinifuges" et "infinicoles" feront rage dans les discussions sur la manière d'introduire les éléments d'analyse dans l'enseignement secondaire et les écoles militaires.

L'éradication de la méthode infinitésimale des textes d'analyse est un phénomène typiquement "vingtième siècle". Les classiques célèbres (Goursat, Tannery, Valiron, Favard, Schwartz, Dieudonné, ...) ne la mentionnent plus. La raison est simple : l'approche infinitésimale n'a pas eu son Weierstrass avant la seconde moitié du XXe siècle et, au contraire, l'arithmétisation de l'analyse *via* la construction des réels a conduit à des démonstrations de l'impossibilité, dans IR, d'infiniment petits actuels (Cantor, Vivanti, Peano, ...). On notera toutefois, à la même époque, les recherches de du Bois Reymond, Stolz, et Veronese sur les systèmes "non-archimédiens".

C'est pourtant cette arithmétisation de l'analyse qui va être un moteur puissant vers l'approche formaliste des fondements des mathématiques. Les résultats de Skolem sur l'arithmétique non standard auront peu d'écho chez les analystes jusqu'à ce que Robinson réalise pour la méthode infinitésimale, vers 1960, ce que Weierstrass avait réussi un siècle plus tôt pour la méthode des limites. Toutefois, les pré-requis logiques de l'approche de Robinson restent plus importants que pour l'approche de Weierstrass, un inconvénient qui semble se réduire si l'on adopte l'approche de Nelson.

Ce dernier a proposé une nouvelle axiomatisation de la théorie des ensembles (une extension conservative de ZFC) dans laquelle les infiniment petits et les infiniment grands actuels ont droit de cité. Ainsi, et pour la première fois dans l'histoire de l'analyse, on trouve côte à côte une approche "classique" et une approche infinitésimale répondant aux mêmes critères de rigueur. Mais, et c'est peut-être

---

par les infiniment petits, à laquelle le lecteur pourra toujours rendre par la pensée la forme plus rigoureuse adoptée pour les autres démonstrations.

Indépendamment des avantages incontestables que présente sous le rapport de la brièveté, l'emploi des infiniment petits, il existe un autre motif pour ne pas s'attacher exclusivement aux limites et pour faire marcher en quelque sorte de front les deux méthodes. Le calcul intégral, sous la forme que les géomètres lui ont laissée jusqu'ici, a essentiellement pour objet la considération des quantités infiniment petites ; il est donc nécessaire que l'élève se rende familières ces quantités abstraites, avant d'aborder la seconde partie du traité"

Préface du *Traité de Calcul Différentiel et Intégral*, A. Timmermans (1854).

nouveau, l'approche non standard permet non seulement (dans certains cas, car elle n'est pas la panacée universelle) de formuler et de résoudre plus simplement des problèmes classiques mais aussi de formuler et d'étudier des questions n'ayant pas de sens dans le cadre classique. Ainsi, une oscillation de relaxation de l'équation de Van der Pol

$$x'' + a(x^2-1)\,x' + x = 0$$

pourra être définie comme un cycle limite de cette équation lorsque le coefficient a est un réel infiniment grand. Dans le cas classique, la notion "a grand" n'a pas de signification précise et la limite du cycle lorsque a tend vers l'infini n'est plus la solution d'une équation différentielle du même type.

Il est encore très tôt pour apprécier l'impact de la méthode infinitésimale sur l'enseignement de l'analyse, mais l'existence même de l'analyse non standard conduira à des réflexions intéressantes et fécondes pour les deux approches. Tout le monde connaît, en histoire, le paradoxe affirmant que le présent modifie souvent le passé. La découverte de l'analyse non standard a élargi le point de vue dans l'histoire de l'analyse mathématique : on ne recherche plus seulement les ancêtres de l'approche weierstrassienne en considérant les autres voies comme des impasses plus ou moins intéressantes. On étudie avec d'autres yeux la méthode infinitésimale puisque, non contente d'avoir un passé, elle a maintenant un avenir.

II. LES ENTIERS NAIFS NE REMPLISSENT PAS $\mathbb{N}$
par G. Reeb

La mathématique non standard (NSA) prend au pied de la lettre l'enseignement des théorèmes liés aux noms de Gödel, Skolem, ... Cette originalité est certainement la raison de son efficacité et du fait que progressivement on s'approche d'un exposé "élémentaire" de cet outil.

J'aime exposer les acquis de la logique évoqués par le slogan (qui pourrait être signé par Brouwer) : "Les entiers naïfs ne remplissent pas l'ensemble des entiers de la mathématique classique".[1)]

---

1) "Voilà pourquoi les axiomes de M. Zermelo ne sauraient me satisfaire. (...) L'auteur a cru éviter le paradoxe du plus grand cardinal, en s'interdisant toute spéculation en dehors de l'enceinte d'une *Menge* bien close ; (...). Mais s'il a bien fermé sa bergerie, je ne suis pas sûr qu'il n'y ait pas enfermé le loup."
Henri Poincaré - Dernières *Pensées* (1913)

Le slogan admis, les principes de l'ANS ne surprennent plus. Par exemple : il est évident qu'un entier non naïf mérite le qualificatif 'grand' ; les règles de calcul sur ces grands entiers sont évidentes (le travail a été fait par le constructeur de l'ensemble $\mathbb{N}$).

Les naïfs obéissent au principe naïf de récurrence ; les naïfs ne constituent pas un ensemble mais ils peuvent être enfermés dans un ensemble fini (le segment [0...a] où a est grand est un tel ensemble fini) ...

Bref, Gödel[1)] a vu clairement la situation lors de son intervention évoquée dans la préface à la deuxième édition du célèbre livre d'Abraham Robinson.

Une présentation de l'actuelle table ronde, dans l'un des bulletins du colloque, relance, à mon sens, le débat sur d'antiques préjugés toujours renaissants[2)]. Cette présentation parle de la notion

---

1) "I would like to point out a fact that was not explicitely mentioned by professor Robinson, but seems quite important to me ; namely that non standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result ; and it is true in an even higher misinterpretation of non standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future.

One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following : Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers, etc. But the next quite natural step after reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted. I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developped 300 years after the invention of differential calculus. I am inclined to believe that oddity has something to do with another oddity relating to the same span of time, namely the fact that much problems as Fermat's, which can be written down in ten symbols of elementary arithmetic, are still unsolved 300 years after they have been posed. Perhaps the omission mentioned is largely responsible for the fact that, compared to enormous development of abstract mathematics, the solution of concrete numerical problems was left far behind."

Kurt Gödel (1973).

2) "L'analyse non standard est une application de la logique à l'analyse mathématique. Elle utilise une notion inhabituelle des nombres entiers, qui renvoie aux précurseurs du calcul infinitésimal : elle utilise des nombres infiniment petits ou grands dont le statut mathématique avait suscité tant de difficultés au XVIIIe siècle. (...)".

Lettre d'information n°8 (Novembre 1987).

d'entiers inhabituelle de NSA. Mon texte insiste au contraire sur ceci : un entier, même infiniment grand, est un entier (habituel). On objectera que du moins dans la théorie de Robinson, il n'en va pas de la sorte. Voire ! la pratique de NSA recommandée par Robinson, une fois les fondations acquises, est compatible avec notre vue.

Il conviendrait de ranger au placard les préjugés périmés, dont les Brouwer, Hilbert, Poincaré, ... n'étaient pas dupes. Le débat au fond s'engagera ; je ne préjuge pas de son issue. Depuis vingt ans je cherche à y voir clair !...

III. VIEILLES AMOURS, CHIFFONS A VENDRE
par C. Lobry,

1. **Une** histoire qui aurait pu se produire

19.... Département de mathématiques de Strasbourg, dans le bureau du directeur.

Le Directeur : Ecoute moi bien R..., ce n'est plus possible, j'apprends que tu tiens encore des réunions où tu parles de tes entiers naïfs ...

- Mais ce n'est pas un séminaire public, il n'y a pas d'affiches, presque personne n'est au courant.

- Ca ne fait rien, si cela venait à s'ébruiter c'est tout notre contrat avec Dassault qui saute ; combien de fois faudra-t-il te répéter que C... est leur conseiller scientifique. Tu sais très bien qu'il considère que tout développement de l'ANS serait pernicieux.

- Mais toi, tu le sais pourtant qu'ils ne remplissent pas IN... tu en as convenu l'autre jour...

A ces mots le Directeur devient tout rouge de colère, il éclate

- Je m'en fous, je ne veux plus entendre parler de cette histoire qui ne nous rapporte pas un centime. Nous, nous nous fatiguons à obtenir des contrats... tiens, moi, pas plus tard que la semaine dernière j'ai négocié un contrat de 350 000 F sur le calcul des angles du robot articulé pour le nouveau jeu télévisé "Des chiffres et du muscle"... Pendant que nous faisons tourner la boutique à des choses sérieuses toi, tu t'amuses... Et avec tes. recherches c'est toute notre politique contractuelle que tu risques de remettre en cause. C'est fini les mathématiques de papa, il faut du rentable, du commercial... N'oublie pas que l'Institut ne te supporte qu'eu égard à ta grande notoriété passée. Mais pourquoi, mon Dieu, a-t-il fallu que toi, le père des feuilletages, sombre dans ces enfantillages.

Mais R... n'a pas entendu la fin de ce discours qu'il connaît trop bien. Il s'est éclipsé discrètement sur la pointe des pieds.

Une heure plus tard, toujours dans le bureau du Directeur

- Vous m'avez convoqué, Monsieur le Directeur ... ?

Le Directeur fait mine de terminer un calcul compliqué puis attaque

- Dites moi Duchmoll, combien touchez-vous pour votre travail sur le contrat "Le feuilletage en codimension 1 du Rif Saharien" ?

- Ben ... à peu près 6 000 F par mois. Pourquoi Monsieur le Directeur 3

- Vous savez combien ça fait par an ? ...

- Heu ...

- Avec les charges ?...

- Beeen ...

- 100 000 F, oui cent mille francs, et ce contrat ne nous rapporte que 200 000 F. Alors si vous continuez vos conneries, oui, passez-moi l'expression, vos conneries avec R... moi je vous vire. Votre travail sur les feuilletages en géologie est sérieux, c'est un fait, mais attention, vous n'êtes pas indispensable mon vieux, il y a des tas de jeunes formés à la géométrie qui sont prêts à prendre votre place...

Plus tard, avant la sortie des bureaux, le téléphone de Duchmoll retentit << Allo, ici R... je crois qu'il est préférable, dorénavant, de nous rencontrer discrètement chez l'un d'entre nous >>
Et c'est ainsi que la résistance commença à s'organiser ...

2. Retour à la réalité

Je vous ai fait peur, hein, avec ma petite description ... Soyez tranquilles, ce n'est que de la fiction, les choses ne se sont pas passées ainsi à Strasbourg quand G. Reeb commença à avancer l'idée des infinitésimaux ... Mais c'était en 1975, et depuis les choses ont bien changé ...

Il y a plus de vingt ans, dans les années du Général comme on dit, les mathématiciens avaient des revenus modestes mais suffisants. Les départements de mathématiques des Universités avaient de quoi alimenter leurs bibliothèques, repeindre leurs bureaux et financer quelques missions. Les mathématiques appliquées, j'entends par là les mathématiques liées à l'ordinateur, commençaient à se développer. Des actions incitatives, crédits spéciaux, créations de postes et carrières plus rapides poussaient les jeunes dans cette voie mais l'essentiel était assuré : les mathématiques pouvaient vivre normalement. Tout a changé. D'où cette manifestation qui nous réunit.

C'est sans arrière-pensée que j'applaudis des deux mains à l'initiative de ces journées, et c'est avec grand plaisir que j'ai accepté l'invitation de Mme Diener à cette table ronde, mais je ne peux m'empêcher, à voir le programme qui nous est proposé, de me demander si nous ne faisons pas fausse route. Regardez :

Huit tables rondes sur le thème "Mathématiques appliquées à et/ou utilisées par ...". Une seule sur "Les Mathématiques et la Physique". Deux tables rondes sur l'enseignement des mathématiques dans les lycées et collèges ou dans le Tiers Monde, rien sur les mathématiques dans l'enseignement supérieur. J'ai bien peur que tout cela ne nous mène au :

3. Mercantilisme Naïf

J'appelle "mercantilisme naïf" l'idée selon laquelle les mathématiques seraient un "produit" que l'on "promotionne" pour en assurer la "vente". Les mathématiques ne se vendent pas, on les raconte, on les enseigne. On peut vendre un programme d'ordinateur capable d'assurer la gestion d'une compagnie d'assurance ou de déterminer le profil optimal d'une aile d'avion ; celui qui possède un tel programme possède effectivement quelque chose, même s'il ne connaît pas les techniques mathématiques qui ont permis sa réalisation.

Il ne possède rien que du papier celui qui possède un énoncé du théorème de Poincaré Hopf sans en connaître la signification.

Avant l'ordinateur les mathématiciens ne vendaient rien : ils vivaient généralement de leur travail de professeur, mais parfois aussi d'autres métiers. Les plus chanceux avaient une fortune ou un protecteur qui les dispensaient de travailler pour vivre. Avec l'ordinateur est née la nécessité de réaliser des programmes. Comme il était naturel, des mathématiciens s'y sont consacrés. Les programmes ont été vendus et les mathématiciens qui les réalisaient ont gagné des sous, ce qui est bien normal. Mais pas les mathématiciens qui étaient à l'origine des mathématiques éventuellement utilisées : je n'ai jamais entendu dire que les ayants droit de Fourier aient touché la moindre royalty sur les milliers de programmes qui moulinent de la théorie spectrale sur tous les Crays du monde. Et c'est bien normal également.

Le malheur est que toute cette activité de production de logiciels a eu lieu dans les départements de mathématiques ou a proximité immédiate, laissant croire aux successifs ministres des universités, qui ne demandaient que ça, que les mathématiques pouvaient s'auto-financer. Le "décideur" moyen ne faisant guère de distinction entre l'activité mathématique et la production informatique, a pu croire de bonne foi qu'il développait les mathématiques quand il achetait des ordinateurs aux universitaires. Et au bout du compte jamais l'activité mathématique n'aura été aussi méprisée.

4. Mathématiques utiles / inutiles

Il n'y a pas des mathématiques utiles, qui s'appliquent, et des mathématiques inutiles, des mathématiques pures. Les mathématiques constituent un tout.

Le processus qui fait qu'un jour les réflexions et polémiques sur la nature et les fondements des mathématiques de Borel, Poincaré, Russel, Hilbert suivies par les travaux de logiciens comme Gödel, Turing, Tarski ... ont débouché sur l'informatique théorique, est un processus si complexe qu'il est tout à fait vain de tenter de le dominer. Tout au plus peut-on constater ce fait étonnant :

La science[1]) n'a jamais eu à se plaindre de ses investissements à long terme dans le domaine de la "pensée pure" et plus particulièrement celui de la pensée mathématique.

Les développements récents de l'Analyse Non Standard fournissent une fois de plus une illustration de ce fait. Voici, dans un domaine que je connais bien, un exemple de ce qui s'est passé.

---

1) Savoir si l'Humanité profite des progrès de la Science est une autre question.

Les techniques de l'ANS sont nées de préoccupations pour le moins spéculatives. Sans remonter à Leibnitz ou au Marquis de l'Hospital rappelons simplement que :

- Poincaré n'était pas pleinement convaincu que les infinis de Cantor étaient le paradis sur terre.
- Emile Borel, qui a beaucoup réfléchi sur la nature des nombres, s'inquiétait de ce que les mathématiques étaient bien mal outillées pour rendre compte du vieux sophisme du tas de blé : Trois grains de blé ne constituent pas un "tas de blé", 10^6 grains de blé constituent un "tas de blé", pour quel entier n le tas commence-t-il ?
- Plus près de nous, G. Reeb nous faisait remarquer l'intérêt d'une arithmétique dans laquelle on pourrait dire :

  . le descendant d'un singe est un singe
  . l'ancêtre d'un homme est un homme
  . il existe une chaîne finie qui relie le singe à Darwin.

Toutes ces interrogations ont trouvé des réponses à divers niveaux dans les travaux des logiciens (existence de modèles non standard de l'arithmétique), les travaux de Robinson, le système formel IST de Nelson et l'apostrophe maintenant célèbre :

- Les entiers Naïfs ne remplissent pas IN.

<u>1972</u>

C'est vers cette époque que, préparant un cours de logique, G. Reeb est tombé sur les travaux de Robinson. Il fut rapidement convaincu de l'importance de l'ANS et proposa à quelques jeunes chercheurs de Strasbourg de s'intéresser à ... l'équation de Van der Pol :

V.d.P. $\qquad \epsilon x'' + x'(x^2-1) + x = 0$

On ne compte plus les gens qui ont rigolé. Vous vous rendez compte, proposer un sujet pareil !

Toujours est-il qu'il y eut quelques assistants (c'est-à-dire, à l'époque, des fonctionnaires titulaires, pas contractuels) pour le suivre. Ayant l'assurance de manger, ne désirant pas faire une carrière rapide à tout prix, ces jeunes gens se sont lancés dans une aventure intellectuelle dont l'issue n'était pas évidente. Nous savons maintenant qu'ils ont eu raison.

1986

SIAM J. on Applied Math., dans "The singular hopf bifurcation to relaxation oscillations" S.M. Baer et T. Erneux s'intéressent à l'équation de FitzHug Nagumo :

$$\text{F.H.N.} \qquad \begin{aligned} v_t &= -v(v-1)(v-a) - w + 1 \\ w_t &= \epsilon\,(v - \gamma w) \end{aligned}$$

dont le lecteur mathématicien constatera sans mal l'analogie formelle avec l'équation de Van der Pol citée avant.

Mais la grande différence entre V.d.P. et F.H.N. est que la première, qui modélise les oscillations dans les circuits électriques, n'intéresse plus guère les électroniciens qui ont d'autres chats à fouetter, alors que la seconde intéresse des électrophysiologistes qui y voient une représentation mathématique pertinente de la propagation du potentiel d'action dans les neurones. Savoir si les électrophysiologistes ont beaucoup à apprendre de ces équations est une question (importante) que je ne discuterai pas ici, et je me bornerai à constater que la chose paraît assez pertinente pour qu'une revue, dont le titre indique bien la vocation, accueille en 1986 un article sur les "bifurcations de Hopf singulières", avec une application à F.H.N.

Le message essentiel de cet article est qu'il existe dans ce type d'équations des transitions brusques entre des oscillations de faible amplitude et des oscillations de forte amplitude : une évidence expérimentale y est présentée et une explication théorique partielle, assez complexe, de ce phénomène en est donnée sur la base de techniques traditionnelles de perturbations singulières.

A peu près au même moment, dans les actes du congrès "Mathématiques finitaires" tenu à Luminy en 1985, dans un article signé : Canalis-Durand, Diener, Gaétano, on trouve les choses suivantes : .

- L'équation de Van der Pol présente des transitions brusques entre des cycles de faible et de forte amplitude s'expliquant par la présence de solutions "canards" (rappel de résultats acquis vers 1978).

- La valeur de transition peut être déterminée grâce à des développements en puissance de ϵ dont les coefficients sont déterminés par un algorithme explicite.

- Les techniques du calcul formel permettent de déterminer la valeur de transition avec une précision pratiquement infinie (50 termes du développement !).

Tous ces résultats sont obtenus grâce à des méthodes non standard.

Il est tout à fait clair que moyennant un travail mathématique de routine (mais éventuellement astucieux, c'est un autre problème) ces résultats acquis sur V.d.P. s'étendront, si besoin est, à l'équation de F.H.N. ou à toute autre équation du même type.

Donc, là où des techniques classiques permettent à grand peine de prévoir l'existence d'une transition et d'en localiser la valeur tout juste au premier ordre de grandeur, l'Analyse Non Standard nous a fourni un algorithme, programmable, capable d'une précision arbitraire. Mais mon propos n'était pas ici de montrer la supériorité des techniques de l'ANS dans ce genre de questions, c'est aujourd'hui un fait que seul des mathématiciens ignorants pourraient encore mettre en doute.[1])

A VENDRE

Méthode de résolution des équations de FitzHug Nagumo
Travail soigné, résultat garanti

Sadresser à la rédaction qui transmettra

Reprenons nos équations de FitzHug-Nagumo. Que voilà une belle chose à vendre !

---

1) Il arrive encore d'entendre des mathématiciens de qualité affirmer :

<< Les nombres "infiniment petits" dont l'Analyse Non Standard affirme l'existence ne sont d'aucune utilité pratique puisqu'il est impossible d'en expliciter un seul >>.

<< L'Analyse Non Standard n'a aucun pouvoir prédictif, elle permet, au mieux, de retrouver des résultats classiques ...>>

J'ai rédigé à leur usage une courte note : "Analyse Non Standard et Théorie des Bifurcations". Prépublication 159 Université de Nice, Octobre 1987, où je montre sur la base d'une bibliographie d'une cinquantaine de titres la primauté d'une découverte "non standard".

Il suffit de contacter des Electrophysiologistes et de les convaincre qu'ils ne peuvent pas se passer de la connaissance, avec une précision de l'ordre de 10^{-9}, de la valeur de transition de F.H.N. C'est certainement possible en se donnant du mal. Evidemment il faudra trouver des Electrophysiologistes de l'industrie si nous voulons un contrat qui rapporte. Peut-être en regardant du côté des médecins ...? Ca prendra du temps, mais on y arrivera.

On arrivera à quoi ? A financer pendant deux ans un étudiant qui fera les soi-disant calculs difficiles (en quelques semaines), mais qui en réalité entreprendra un travail de recherche sur un tout autre sujet, et à financer les missions de quelques mathématiciens ? Est-ce là le prix des longues années de cogitations qui ont conduit aux techniques de calcul non standard ?

On m'aurait posé la question il y a quelques années j'aurais répondu : << Certainement pas, mais c'est toujours bon à prendre >>. Et de fait, j'ai grappillé en mon temps quelques sous, de-ci, de-là, en usant de ce procédé. J'ai changé d'avis. Car, si le financement contractuel pouvait être justifié à divers titres lorsqu'il représentait une part tout à fait anecdotique des moyens de financement de la recherche mathématique, il est totalement pervers quand il tend à se généraliser. La mathématique n'est pas à vendre. J'ai essayé dans ma petite scène de science fiction du début de montrer ce qui nous pend au nez si nous poursuivons dans cette voie.

5. Enseigner les Mathématiques

Si l'on peut douter de la nécessité d'une sélection par les mathématiques dans l'enseignement secondaire, on ne peut douter par contre de la nécessité d'un enseignement des mathématiques dans la majorité des formations scientifiques des universités. Ce qui me fait penser qu'en plus des industriels, hommes politiques et décideurs que nous essayons légitimement de toucher, il serait tout à fait nécessaire de renouer le contact avec nos interlocuteurs naturels : nos collègues enseignant la Physique, la Chimie, la Biologie, la Géologie, ..., la Philosophie.

Car si nous devons aujourd'hui nous battre pour prouver "l'utilité des Mathématiques",

- n'est-ce pas pour avoir accepté sans réagir l'opinion de nos collègues, physiciens en particulier, que les << mathématiques enseignées par les mathématiciens sont inutiles >> ?

- n'est-ce pas pour avoir accepté un peu trop facilement que des non professionnels des mathématiques enseignent les mathématiques des premiers cycles de biologie, de médecine, des seconds cycles de physique, d'électronique, d'automatique ?

- n'est-ce pas pour avoir accepté un peu vite, que les mathématiques disparaissent à peu près totalement de la formation des ingénieurs en informatique ?

Si nous avions su maintenir un dialogue avec nos collègues non mathématiciens nous n'aurions peut-être pas à répondre à l'accusation de Platonisme primaire, hélas justifiée, de notre collègue Claude Allègre dans le numéro de Novembre 1987 de ***Pour la** Science*. Si nous avions maintenu ce dialogue nous n'aurions peut-être pas à convaincre la Direction Scientifique du CNRS que nous devons exister ?

Et ce dialogue que nous n'avons pas su entretenir avec nos partenaires naturels, il me paraît un peu vain de vouloir l'instaurer du jour au lendemain entre nous et le public.

6. Une chance à saisir

Il n'est pas facile de renouer avec le conjoint abandonné. Trop sûre de ses charmes la mathématique des années passées a joué la Diva laissant le Physicien à ses "Calculs de Physicien", ces calculs "non rigoureux" où un chat est appelé un chat et un infiniment petit un infiniment petit. Mais la Castafiore ne fait plus recette.

Robinson, Nelson, Reeb nous ont fourni un langage où les infinitésimaux ont droit de cité. Retournons voir le Physicien, le Chimiste, le Biologiste ... << Nous avons un langage qui devrait nous permettre de nous mieux comprendre... Veux-tu essayer encore une fois ? >>[1)]

IV. UTILISATION DES METHODES INFINITESIMALES EN CALCUL DES PROBABILITES par Pierre Cartier

A la suite **des** travaux de A. Robinson - qui, ne l'oublions pas, fut à la fois l'un des créateurs de l'aile Delta dans l'aéronautique

1) E. Nelson vient de publier un livre : *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton University Press., qui montre clairement que, pour ce qui concerne la théorie des probabilités, cette voie est possible.

supersonique moderne, et l'un des plus grands logiciens de ce siècle - s'est développée au début des années soixante une codification rigoureuse de l'emploi des infiniment petits et des infiniment grands en mathématiques : ce fut l'origine d'une résurgence des méthodes infinitésimales.

Ces méthodes ont bien évolué depuis, en particulier dans le sens d'une plus grande simplicité. L'un des points de vue adopté aujourd'hui - proche de celui de l'Ecole tchèque de P. Vopenka - peut être résumé ainsi :

> *Les ensembles sont essentiellement finis, mais ils sont de deux sortes : les petits et les très grands, ces derniers étant souvent appelés hyperfinis.*

En ce qui concerne le calcul des probabilités, E. Borel a très bien souligné en son temps l'un des points essentiels, qu'il appelle la loi unique du hasard, sur lequel on achoppe souvent dans les applications : "Un évènement de probabilité très petite ne se produit pas, ou tout au moins on peut se conduire comme s'il ne devait pas se produire".

Dans les modèles les plus simples du calcul des probabilités tels qu'ils étaient connus au début du siècle et pratiqués encore par J. Hadamard, H. Poincaré, et E. Borel lui-même, avant la création de la théorie moderne de l'intégrale de Lebesgue, il n'y a guère de problèmes de fondement. Si dans une boite, il y a 100 boules dont 54 sont blanches, la probabilité de tirer une boule blanche, est de 54/100. C'est le *modèle d'urne.* On peut ensuite "justifier" cette définition de la probabilité, par des théorèmes tels que la loi des grands nombres, en l'interprétant comme une fréquence dans une longue chaîne de tirages indépendants.

Par contre, quand on a voulu appliquer ce modèle du hasard à des problèmes portant sur le continu, on est tombé sur des paradoxes car on ne pouvait admettre qu'il y ait un nombre fini de points sur une droite. En d'autres termes, on ne peut pas donner un sens mathématique strict à la loi unique du hasard sans donner un sens mathématique strict à la notion de probabilité *très petite*, ou *infinitésinzale.*

Bâtissant sur les fondements donnés par A. Robinson, E. Nelson a proposé il y a quelques années, une refonte du calcul des probabilités. Son livre vient de paraître. La théorie moderne des probabilités remonte aux années trente quand Kolmogoroff l'a axiomatisée dans un livre justement célèbre ; il met à la base de cette théorie l'intégrale de Lebesgue sous sa forme la plus générale : une mesure dénombrablement additive sur une σ-algèbre de parties d'un ensemble. Cette axiomatique a conduit à d'immenses succès, mais également à un certain nombre de complications, en particulier dans le maniement des probabilités conditionnelles. Voici un exemple typique : si l'on tire au hasard un point dans un plan, et qu'on sache déjà qu'il se trouve dans une partie A, la probabilité de le trouver dans une partie B est le rapport des aires de B et de A. Mais si A est, par exemple, une ligne, A et B ont des aires nulles et la probabilité cherchée est $0/0$. On s'en tire, dans la théorie de Kolmogoroff, par un moyen assez détourné.

Dans l'approche de Nelson, on revient à un modèle d'urne, et donc à un modèle fini, mais on se place dans un ensemble hyperfini, c'est-à-dire dans un ensemble ayant les propriétés des ensembles finis usuels, mais contenant un nombre infiniment grand (on dit illimité) d'éléments. Si N est le nombre d'éléments de l'ensemble, la probabilité d'un point particulier sera $1/N$, donc infinitésimale. Comme les probabilités, au même titre que les autres nombres réels, ne sont jamais évaluées qu'à un nombre infinitésimal près, on peut considérer que, isolé, ce point ne compte pas. On remplace la notion d'événement négligeable par la notion d'événement de probabilité infinitésimale, ce qui semble plus conforme à l'idée intuitive que l'on a des probabilités. Le problème des probabilités conditionnelles ne se pose plus car le rapport α/β de deux infinitésimaux α et β est bien défini, à l'inverse du nombre litigieux $0/0$ rencontré plus haut.

Un autre paradoxe bien connu concerne l'espérance mathématique : personne ne souhaite parier une somme d'un milliard sur un événement dont la probabilité est l'inverse d'un milliard, bien que son espérance mathématique soit 1. Nelson résout ce paradoxe en introduisant la notion de *variable aléatoire intégrable*. Une variable aléatoire associe comme d'habitude à chaque point 1, 2, 3,... de l'urne une valeur bien déterminée, x_1, x_2, x_3 ... Pour qu'elle soit intégrable, on demande que la moyenne des x_i soit limitée mais surtout que la propriété de stabilité suivante soit satisfaite : si l'on modifie la variable aléatoire sur un événement de probabilité infinitésimale, la valeur moyenne n'est modifiée que d'une quantité infinitésimale. Dans le cas d'une urne d'un milliard d'éléments, une variable aléatoire prenant la valeur un milliard en un point et zéro en tout autre point n'est pas intégrable.

Dans son livre, Nelson démontre en quelques lignes des analogues des théorèmes de Lebesgue, et il est facile de voir que ces nouvelles formulations ont au moins la même puissance dans les applications que les formulations usuelles. Il montre aussi, par exemple, que l'on peut donner dans ce contexte une présentation du mouvement brownien, qui reste extrêmement proche de celle des ingénieurs. Un mouvement brownien est décrit simplement de la façon suivante : sur un intervalle de temps, contenant un nombre hyperfini d'instants t_0, t_0+dt, t_0+2dt, ... , *dt* étant un nombre infiniment petit, on considère un déplacement entre deux instants consécutifs, vers la gauche ou vers la droite, d'une quantité *dx* qui doit vérifier l'égalité $(dx)^2=dt$. Les choix successifs d'aller vers la gauche ou la droite sont faits indépendamment et au hasard, avec probabilité 1/2 pour chaque possibilité. Ce processus est bien un modèle du mouvement brownien, en ce sens que si l'on enlève un ensemble de trajectoires de probabilité infinitésimale, les trajectoires restantes sont continues au sens intuitif de la continuité : lorsque le temps varie d'une quantité infinitésimale, la position varie d'une quantité infinitésimale.

Il n'est pas possible de donner en quelques lignes une idée complète des résultats ou des perspectives apportés par cette approche infinitésimale du calcul des probabilités. Mais on peut penser qu'il s'agit peut-être de l'amorce d'un renouveau pour ce calcul, en particulier parce que les techniques difficiles, dans le maniement des probabilités conditionnelles, qui nécessitent d'ordinaire une haute virtuosité, ne se posent plus dans ce contexte. Cette approche présente en outre l'avantage scientifique de réduire la distance énorme qui était apparue entre l'approche intuitive du calcul des probabilités tel qu'il est pratiqué par les ingénieurs, et les méthodes rigoureuses qui ont fondé ce calcul à la suite des travaux de Kolmogoroff.

V. Un avis de Ian Stewart[1)]

(...)

Logic for engineers ?

Indeed there are reasons to expect that it is in applied mathematics that the most useful products of non-standard analysis might emerge. First, because applied mathematicians, engineers, and scientists already think in terms of infinitesimals like dx. Second, because so much attention is paid to small perturbations. And too much

---

1) *The problems of Mathematics*, **Oxford University Press**, 1987, **Chap.7** : *Ghost of departed quantities*, **pages** 78-79.

of perturbation theory is hopelessly unrigorous and disorganized, and reeks of rule-of-thumb. There's a good chance that non-standard analysis could bring some much-needed order into this area, and add some power to its elbow. The non-standard analysts have explored some of the possibilities, including polynomial equations, fast-slow flows, geodesics, boundary value problems, boundary layer flow, stochastic differential equations, and spin systems in mathematical physics.

In scientific research, on might expect new ideas from elsewhere, new techniques, new phenomena, to be seized upon and exploited. Actually this only happens if they don't have to cross traditional boundaries between, subjects. The 'Not Invented Here' syndrome is very strong, and some perturbation theorists appear to be suffering from it. (...)

But the reaction is symptomatic of a genuine problem, by no means confined to applied mathematics. The people most knowledgeable about the area of application are not, by training, equipped to handle a technique that developed out of mathematical logic - especially one which requires a distinctly different cast of mind, a new style of thinking that takes several years to get used to. They aren't impressed by the way it makes sloppy thinking rigorous, because - dare I say it - they'd rather stay sloppy. And so it will be the non-standard analysts who have to push ahead with applied development, until they finally come up with something so dramatic that even the least imaginative perturbation-theorist will begin to feel that may be he's missing out on something. Of course it may never happen - but I rather suspect it will, for the times they are achanging. However, whether the engineers of the twenty-first century will have to study the metamathematics of model theory remains open to doubt.