

QUELQUES GRANDS PROBLEMES EN MATHÉMATIQUES

par

**F. Dress, P. Eymard, B. Teissier,
G. Lachaud, A. Chenciner, P. Cartier,
J-M. Deshouillers, J. Lefort**

I. COMMENT VIVENT LES MATHÉMATIQUES ?

Parmi les conférences et les tables rondes de ce Colloque, nombreuses étaient celles qui montraient les Mathématiques de l'extérieur, au travers de leurs différentes interfaces avec la société. Le but de celle-ci est complémentaire : faire connaître les Mathématiques de l'intérieur. Le mathématicien n'est pas un être à part, et sa démarche est par de nombreux aspects semblable à celle des autres scientifiques. Mais cette démarche présente aussi des traits particuliers et originaux, et il est souhaitable que le non-mathématicien puisse en avoir une idée globale. Cela peut se faire à travers ce que la communauté mathématique appelle les grands problèmes. Ils ne sont qu'un des aspects de l'activité mathématique, mais ils sont aussi - tout au moins pour certains d'entre eux - un lieu privilégié de communication avec le non-mathématicien, voire de communication entre mathématiciens.

Une question se pose tout de suite : qu'est-ce que la communauté mathématique considère comme étant de grands problèmes, et pour quelles raisons ? Sur une palette variée d'exemples, les intervenants ont essayé de répondre à cette question.

Ils ont ensuite montré la place essentielle que tiennent ces grands problèmes au coeur de l'activité mathématique : moteur de la dynamique interne de la recherche, ferment de la structuration des théories, origine directe ou indirecte de presque tous les développements féconds. Des caractéristiques de l'évolution des mathématiques ont été dégagées : sans que les théorèmes démontrés ne soient (en principe) remis en cause, leur accumulation et la "poussée"

des grands problèmes provoquent un changement de formulation des questions et une réorganisation des théories.

Outre la dimension culturelle du savoir, un point important pour la société est celui des rapports entre les développements théoriques et les utilisations pratiques, et ce Colloque dans son ensemble s'y est beaucoup intéressé. Il y a, concernant ces rapports, des fait d'expérience dont la lecture sous l'angle des grands problèmes est passionnante et éclairante : notamment *une constante de temps* souvent très grande, et aussi une évolution surprenante des liaisons entre la théorie et les applications. Les intervenants ont évoqué ces rapports et ont tenté d'apporter quelques éléments de réponse à des questions telles que : peut-on prévoir (de l'extérieur) les utilisations des Mathématiques, ou bien : peut-on programmer (de l'intérieur) la recherche mathématique ?

II. DEROULEMENT DE LA TABLE RONDE

Environ 200 personnes y ont participé. F. Dress dirigeait les débats, en remplacement de P. Eymard, empêché. La première mi-temps de la rencontre a été consacrée à de courts exposés sur quelques grands problèmes.

B. Teissier a présenté le problème isopérimétrique, vieux de 2400 ans, et montré comment il a inspiré, depuis le calcul des variations jusqu'à des questions de combinatoire ou de géométrie algébrique, des recherches extrêmement variées.

G. Lachaud, dans un saisissant raccourci de l'histoire des équations diophantiennes, de Diophante lui-même et Fermat jusqu'au théorème de Faltings, a indiqué le rôle important de structuration et de lien entre disciplines joué par les grands problèmes.

A. Chenciner a montré comment le très concret problème des trois corps est à la source de grands pans de mathématiques pures, et continue à les vivifier.

P. Cartier, parcourant la bien curieuse histoire du troisième problème de Hilbert, a fait apparaître les rebondissements de ce qui aurait pu ne sembler qu'un banal problème de "découpage" géométrique ; formulé dans un cadre géométrique élémentaire, ce problème a nécessité pour sa solution des outils très élaborés et continue à susciter des questions parfois inattendues.

J.M. Deshouillers enfin, à travers l'évolution de la théorie des nombres premiers, a mis en lumière quelques traits significatifs : les détours souvent indispensables pour la résolution d'un problème, le caractère d'"auto-modélisation" des Mathématiques, l'absence de différence de "nature" entre Mathématiques dites pures et appliquées.

La seconde mi-temps a été consacrée au débat public. Parmi les points évoqués ou controversés, on a noté l'importance de la fécondité pour la qualification "grand problème (ainsi le problème des quatre couleurs, par exemple, n'est que célèbre), l'ambiguïté de fait sur la signification de "résoudre un problème", l'importance du facteur temps.

On a regretté enfin que la présentation de grands problèmes soit absente de l'enseignement, où elle pourrait à la fois jouer un rôle motivant certain et rappeler que l'intuition, le doute, les essais... ont leur place en mathématiques.

III. CONTRIBUTIONS ECRITES

On trouvera ci-dessous le texte de P. Eymard sur le problème de Dirichlet avec des textes relatifs aux interventions orales de B. Teissier, A. Chenciner, G. Lachaud et J-M. Deshouillers, puis les notes prises par J. Lefort à l'issue du débat public.

LE PROBLEME DE DIRICHLET

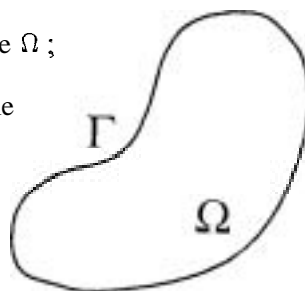
Le problème de Dirichlet semble à bien des égards exemplaire. Il est apparu dans la moitié du XIXe siècle. Il s'agissait de rendre rigoureux le principe de Dirichlet : il existe une solution du problème aux limites de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ sur } \Omega ;$$

$$u = f \text{ donnée sur } \Gamma = \partial\Omega \text{ la frontière de } \Omega ;$$

elle est donnée par la fonction u qui réalise le minimum de l'intégrale d'énergie

$$\iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$



pour u = f sur Γ.

Une crise qui mobilise la recherche mathématique

Kiemann, ce grand intuitif, tenait ceci pour acquis, puisqu'il fallait bien que la situation qui correspondait en physique aux données du problème atteigne une position d'équilibre. Mais Weierstrass objecta qu'il arrivait souvent en mathématiques qu'une borne inférieure ne soit pas atteinte, puis il produisit en l'espèce un contre-exemple. Il en résulta une crise, un phénomène de rejet du principe de Dirichlet, qui dura trente ans, jusqu'à ce que Hilbert vers 1900 ressuscite le principe en montrant sa validité sous des hypothèses convenables sur les données-frontière.

Ceci conduisit Hilbert à formuler son vingtième problème dans la célèbre liste qu'il présenta au congrès de Paris en 1900. Il s'agit du problème général aux limites pour les équations aux dérivées partielles elliptiques. Plus que d'un problème précis appelant une réponse par oui ou par non, il s'agissait d'un véritable programme mobilisateur qui continue de se développer de nos jours.

Les efforts faits dans les derniers trois-quarts de siècle pour réaliser ce programme ont permis d'inventer des techniques d'analyse fonctionnelle, de développer des idées-force d'une portée bien plus générale. Citons brièvement :

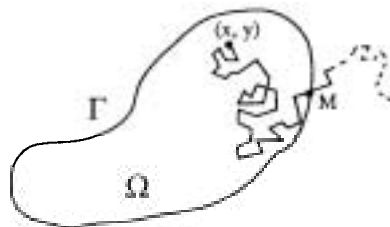
- les méthodes de déformation homotopique du problème, depuis une situation connue jusqu'à celle qu'on veut résoudre ;
- les estimations *a priori* des dérivées partielles ;
- la définition d'un espace de fonctions "généralisées", où l'on cherche la fonction minimisante comme réalisant le minimum sur un compact d'une fonction semi-continue inférieurement ;
- le lien profond qui a été trouvé entre, par exemple, le problème originel de Dirichlet et la théorie probabiliste du mouvement brownien :

$$Au = 0 \text{ sur } \Omega ; u = f \text{ sur } \Gamma$$

équivalent à

$$u(x,y) = \text{espérance } (f(M))$$

où M est le point (aléatoire) de Γ par lequel le mouvement brownien issu du point (x,y) de Ω sort pour la première fois de Ω .



Quelques réflexions sur l'évolution **des** mathématiques

Ce qui précède amène à souligner quelques points de portée générale :

1) L'aspect "programme mobilisateur" de certains grands problèmes (et notamment de celui-là) a déjà été indiqué.

2) L'intervention de processus aléatoires (mouvement brownien) dans un problème de pure analyse à l'origine montre bien l'unité profonde des mathématiques qui apparaît chaque fois qu'on pose les vraies questions.

3) La crise de fragilité du principe de Dirichlet à la fin du siècle dernier fait apparaître certaines difficultés de la modélisation des phénomènes physiques. Cependant la suite des événements a prouvé que, quand une idée intuitive d'origine physique est profonde, on parvient toujours à la sauver mathématiquement en y mettant le prix. Ceci contribue alors à rendre crédible une modélisation initiale insuffisante.

4) Le réservoir à problèmes en mathématiques est inépuisable car, sitôt qu'un problème particulier est résolu, sa solution même (ou la crise ouverte par sa solution négative) appelle d'autres problèmes qui viennent prendre sa place.

LE PROBLEME ISOPERIMETRIQUE

<< Cependant, les théories ont leurs commencements : des allusions vagues, des essais inachevés, des problèmes particuliers ; et même lorsque ces commencements importent peu dans l'état actuel de la Science, on aurait tort de les passer sous silence. >>

Frédéric Riesz, 1913

Les mathématiques sont un investissement à très long terme

Le problème isopérimétrique n'est peut-être pas un "grand problème", mais il est certainement un vieux problème. Son origine mythique est la nécessité pour la reine Didon d'enfermer la plus grande surface possible avec une peau de boeuf ; elle eut l'idée de la découper en lanières et dut ensuite se demander quelle forme donner à

un fil pour qu'il enferme la plus grande surface possible. J'appellerai problème isopérimétrique le problème consistant à montrer que parmi tous les domaines du plan ayant un périmètre donné, le disque est celui qui a la plus grande aire.

Je l'ai choisi pour illustrer comment un problème d'énoncé fort simple peut en Mathématiques donner naissance à des concepts assez profonds pour qu'ils aillent ensuite enrichir des branches de Mathématiques *a priori* fort éloignées. Ce problème de géométrie euclidienne a fécondé l'analyse, puis plus récemment la géométrie riemannienne et la géométrie algébrique. Sa version multidimensionnelle a permis en 1982 de donner une démonstration fulgurante d'un problème de combinatoire posé en 1928 et qui avait résisté à de nombreux efforts. Je veux aussi insister sur le fait qu'il n'a pu être posé clairement que vers le début du XVIII^e siècle et n'a été résolu qu'à la fin du XIX^e alors que les Grecs de l'époque classique étaient déjà tout à fait conscients de la propriété extrême du cercle. On insiste souvent à juste titre sur le fait que les Mathématiques inventent des concepts dont l'utilité "pratique" n'apparaît parfois que plusieurs décennies ou siècles plus tard, et que la recherche mathématique est donc un investissement à très long terme. En sens inverse, il est aussi vrai que des problèmes "concrets" peuvent contribuer à créer des concepts mathématiques pendant plusieurs siècles ; l'histoire que je vais esquisser est en fait celle d'une longue méditation mathématique, commencée il y a 2400 ans et qui n'est pas encore terminée, sur les concepts d'aire et de volume, et sur le concept d'*extremum*.

Je dois aussi souligner que la motivation de ces recherches n'était pas dans les applications. Les architectes navals n'ont pas attendu la démonstration rigoureuse de l'inégalité isopérimétrique pour faire des hublots ronds. Comme le dit joliment T. Bonnesen dans l'introduction de son livre "sur le problème des isopérimètres et des isépiphanes" (1929) :

"Et ces propriétés du cercle et de la sphère sont tellement intuitives que, pour l'homme de bon sens, il paraît superflu d'en donner des démonstrations. Pour les géomètres au contraire la démonstration exacte des théorèmes en question a présenté des difficultés assez grandes".

Cependant les retombées pratiques des mathématiques au développement desquelles le problème isopérimétrique a contribué sont

incalculables et dépassent de très loin ce qu'aurait pu donner une réflexion "pilotée par les applications" (pour n'en citer qu'une classe : les calculs sur les vibrations des structures, comme les ponts par exemple).

Une autre idée que j'aimerais illustrer dans cet exposé est donc que la recherche de la rigueur est un puissant moteur pour l'invention, et fournit ainsi des champs d'application bien plus vastes que la "vérité utile" que l'on cherchait à établir.

Une première approche hésitante

Il est possible que le premier énoncé mathématique du problème isopérimétrique soit dû à Archimède (287-212 av. J.C.) mais la première solution d'un problème analogue qui soit parvenue jusqu'à nous est celle de Zenodorus qui vivait entre 200 av. J.C. et 90 après J.C. Celui-ci prouve par exemple que parmi tous les polygones ayant un nombre donné de côtés et inscrits dans un cercle donné, c'est le polygone régulier qui enferme la plus grande aire.

Polybius (201-120 av. J.C.) insiste sur le fait que les gens mesurent l'aire des villes et des champs par leur circonférence ; il ajoute : "l'ennui est que nous avons oublié nos leçons de géométrie".

Proclus, qui vivait au cinquième siècle, mentionne des procès opposant (au premier siècle?) des membres de communautés d'agriculteurs grecs où la terre devait être également répartie entre tous, mais l'était selon le périmètre... avec les résultats que l'on pense au moment de la récolte.

Le rapport entre le périmètre et l'aire n'était donc pas tout à fait clair bien que la propriété d'extrémalité du cercle ait été clairement vue, au moins parmi les courbes que connaissaient bien les Grecs : coniques et polygones. Il paraît d'ailleurs que certains commentateurs tardifs mettaient en doute la proposition d'Euclide selon laquelle tous les triangles qui ont une base donnée et dont le sommet opposé parcourt une droite parallèle enferment la même aire, pour la raison que l'on peut faire tendre le périmètre vers l'infini en éloignant le sommet sur la parallèle.

Naissance du calcul des variations

Le problème théorique semble ensuite reposer jusqu'au XVIII^e siècle, et il va se réveiller dès que le calcul infinitésimal donnera des techniques pour étudier le problème que voici : étant donné un ensemble de courbes, et une grandeur associée à chaque courbe de l'ensemble (par exemple un temps de parcours, ou une variation d'énergie), déterminer la ou les courbes qui rendent maximale ou minimale cette grandeur ; c'est la naissance du calcul des variations comme branche de l'analyse. La solution des premiers problèmes de calcul des variations, comme celui de la "courbe brachystochrone", qui est la courbe joignant deux points donnés d'un plan vertical le long de laquelle le temps de chute d'une bille sans frottement est minimal, cette solution, dis-je, est obtenue en écrivant qu'un *extremum* (maximum ou minimum) "annule la dérivée" ; cela conduit pour chaque problème à des équations appelées équations d'Euler. Les courbes qui satisfont ces équations sont candidates à donner le maximum ou le minimum cherché, mais il se peut aussi qu'aucune de ces courbes ne donne l'*extremum*, et qu'en fait cet *extremum* ne soit pas atteint. Décider de l'existence de l'*extremum* est en fait la difficulté majeure du calcul des variations, mais comme dans les cas analogues à celui de la brachystochrone les équations d'Euler pouvaient être assez facilement intégrées pour donner explicitement la solution cherchée, le problème de l'existence de la solution ne se posait pas. C'est, je crois, une des grandes contributions du problème isopérimétrique que d'avoir obligé les mathématiciens à poser le problème de l'existence des solutions des problèmes variationnels, et voici comment :

Les équations d'Euler n'ont de sens que sous des hypothèses de dérivabilité, donc de régularité des courbes considérées, qui ne sont pas du tout naturelles dans le problème isopérimétrique. Après des travaux analytiques pas vraiment concluants de Jacob et Johan Bernoulli et de Brook Taylor, les géomètres du début du XIX^e avaient donc cherché des solutions géométriques et Jacob Steiner avait inventé une construction géométrique, la symétrisation de Steiner, qui associe à chaque domaine qui n'est pas un cercle et à une direction de droite un nouveau domaine ayant la même aire et un périmètre plus petit. Steiner a cru pouvoir en déduire une propriété d'extrémalité du cercle équivalente à la propriété isopérimétrique ; parmi les courbes qui enferment une aire donnée, il a le plus petit périmètre. Mais il supposait l'existence d'un *extremum*.

O. Perron a fait observer que le même schéma de démonstration prouverait que "le nombre 1 est le plus grand nombre entier", puisqu'à tout nombre entier a différent de 1 on peut en effet associer un nombre entier plus grand, son carré a^2 . Cet argument montre seulement que le nombre 1 est le seul *candidat* possible, et l'erreur de cette "démonstration" est évidemment qu'ici le maximum n'existe pas. Il a ainsi souligné que le problème essentiel est celui de prouver l'existence d'une courbe ayant la propriété extrémale, par exemple en trouvant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit extrémale.

Du problème isopérimétrique au problème de Dirichlet et au tambour

C'est à peu près à la même époque que Lejeune-Dirichlet affirmait la possibilité de prolonger une fonction donnée sur le bord d'un domaine D du plan en une fonction définie à l'intérieur de celui-ci et minimisant une "énergie". Les sources physiques de la théorie du potentiel (cherchant à mettre dans un même cadre mathématique le potentiel gravitationnel et le potentiel électrostatique) faisaient que nul ne doutait de l'existence de telles fonctions, dites "harmoniques", mais l'usage fait par Riemann de ce "principe de Dirichlet" (voir le paragraphe 1), et peut-être aussi l'accent mis sur les problèmes d'existence à propos du problème isopérimétrique, ont amené plus tard les mathématiciens à s'interroger sur ses conditions précises de validité. Les méthodes mises au point à propos du problème isopérimétrique, ainsi que des méthodes d'analyse, ont contribué à la création d'une magnifique théorie qui contient en particulier le problème de Dirichlet, le problème isopérimétrique, et des inégalités d'analyse reliant la forme d'un domaine du plan à la fréquence fondamentale d'un tambour dont la membrane aurait la forme de ce domaine. L'analogue dans ce dernier cas du théorème isopérimétrique est que parmi tous les domaines du plan ayant la même aire, c'est le disque qui donne la note fondamentale la plus basse.

Une partie de cette théorie donne des conditions *suffisantes* pour l'existence de solutions d'un problème de calcul des variations, et a permis à Weierstrass et Schmidt de résoudre finalement de manière satisfaisante le problème isopérimétrique dans les années 1880.

Minimiser l'énergie

Tout cela ne constitue aujourd'hui qu'une toute petite partie du calcul des variations, qui continue à être utilisé partout en physique,

l'idée restant depuis Maupertuis et Laplace que tout mouvement, une fois représenté dans un espace de configuration convenable, doit se faire de façon à minimiser une dépense d'énergie convenablement définie. Par exemple les fameuses équations de Yang-Mills de la Physique contemporaine sont des équations variationnelles. La symétrisation de Steiner est devenue une technique classique de calcul des variations qui sert à prouver des résultats d'analyse.

Les généralisations de la partie "fréquence fondamentale d'un tambour", que les mathématiciens appellent "spectre du Laplacien" forment en ce moment un domaine de recherche très actif où coopèrent la géométrie et l'analyse fine. Tout récemment Colin de Verdière a trouvé des liens entre ce spectre du Laplacien pour une surface et le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier une carte tracée sur cette surface (qui est égal à 4 pour la sphère d'après le Théorème des quatre couleurs, mais ceci est une autre histoire, du moins pour le moment).

Retour à la **géométrie**

Le problème isopérimétrique en dimension supérieure, qui consiste en dimension 3 à montrer que parmi tous les solides (appelés isépiphanes) ayant la même surface de bord, c'est la boule qui possède le plus grand volume, avait été abordé géométriquement dès le début du XIX^e siècle, en particulier par Steiner. Il y a des difficultés nouvelles car le comportement du volume est plus compliqué ; par exemple on ne peut pas du tout se ramener, comme dans le plan, au cas où les domaines considérés sont convexes. Pour bien comprendre il faut écrire quelques formules. Il y a un résultat quantitatif, l'"inégalité isopérimétrique" : $(\text{Vol}(\partial D))^d \geq d^d \text{Vol}(B) \text{Vol}(D)^{d-1}$ reliant le volume $(d-1)$ -dimensionnel du bord ∂D d'un domaine D de l'espace de dimension d et le volume de D (ainsi que celui de la boule B de rayon 1, qui intervient comme une constante ne dépendant que de la dimension), sous la seule contrainte que ces deux quantités aient un sens, c'est-à-dire pour les domaines qui ne sont pas des "Fractals". En dimension $d=2$, cela donne $L^2 \geq 4\pi S$, où L est le périmètre du domaine et S sa surface, et le problème isopérimétrique revient à montrer que l'on a l'égalité seulement si le domaine est un disque. La démonstration générale de l'inégalité isopérimétrique remonte aux années 1930. Dès que la dimension de l'espace est au moins 3, on peut avoir égalité pour des domaines autres que la boule de dimension d , mais on peut montrer cependant que si D donne l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique, alors D est une boule à laquelle on a ajouté un "voile" de volume nul. Si l'on veut que l'égalité n'ait lieu que pour la boule, on peut se

restreindre à l'étude des corps convexes, et l'on a alors bien mieux. Étant donnés deux domaines convexes K et K' de l'espace affine de dimension d , il est clair qu'ils peuvent avoir le même volume sans être égaux à une translation près. Il se trouve que l'on peut généraliser le concept de volume comme ceci : étant donnés deux convexes K et K' , on peut intercaler naturellement entre le volume de K et celui de K' des *volumes mixtes*, bien définis mais ne dépendant que de K et K' , pour obtenir une suite de $d+1$ nombres positifs ou nuls v_0, v_1, \dots, v_d , avec $v_0 = \text{Vol}(K)$ et $v_d = \text{Vol}(K')$. Le miracle est que deux convexes K et K' sont égaux à une translation près si et seulement si *tous* leurs volumes mixtes sont égaux. L'inégalité isopérimétrique est dans ce cas une conséquence des inégalités bien plus précises que voici : $v_i^2 \geq v_{i-1} \cdot v_{i+1}$ pour $i=1,2,\dots,d-1$. Cela suffit pour prouver que parmi les convexes, on n'a égalité dans l'inégalité isopérimétrique que si K est une boule.

Ces inégalités ont vers 1980 servi à prouver une conjecture combinatoire (la conjecture des permanents de van der Waerden) qui avait résisté à beaucoup d'efforts depuis 1926, et elles ont d'autres applications en combinatoire. Elles ont d'autre part été reliées, au moyen d'un dictionnaire établi récemment entre la théorie des convexes et une partie de la géométrie algébrique, à la "théorie de Hodge". Comme cette dernière, toute géométrie qu'elle soit, descend en ligne directe du principe de Dirichlet, cette relation est en fait une résurgence moderne et géométrique de l'analogie féconde entre le problème isopérimétrique et le problème de Dirichlet. Cela a inspiré des énoncés dont la vérification permettrait entre autres choses de préciser et généraliser des inégalités de géométrie algébrique utilisées pour démontrer la conjecture de Weil correspondant pour les courbes algébriques sur les corps finis à l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction ζ , qui est en ce moment le "grand problème" par excellence. Les volumes mixtes ont aussi été introduits vers 1983 dans la théorie des espaces de Banach, qui sont des espaces de dimension infinie où la géométrie de la "boule de rayon un" joue le rôle central et des variantes de l'inégalité isopérimétrique jouent en ce moment un rôle crucial dans certaines parties de l'étude de la géométrie des objets les plus généraux appelés variétés riemanniennes, pour lesquels les vocables de distance, boule, volume, etc. ont un sens. Ceci nous a donc ramenés à la Géométrie, d'où nous étions partis.

Comme un ruisseau qui reçoit des affluents, le courant de pensée issu du problème isopérimétrique s'est mêlé à bien d'autres, inspirés des applications ou bien des problèmes les plus "purs", et ce que nous

observons aujourd'hui est le résultat de ces mélanges. Distinguer la part des eaux qui provient de chaque affluent est impossible et d'ailleurs sans grand intérêt, mais je pense que la géométrie du "réseau hydrographique", dont je n'ai présenté ici qu'une partie, peut donner une idée de la richesse de la construction mathématique.

L'ANALYSE DIOPHANTINNE ET LE THEOREME DE FALTINGS

Les grands problèmes, en mathématiques, évoluent en changeant : je me propose de montrer ici comment un thème donné, celui des équations diophantiennes, évolue au fur et à mesure que les mathématiciens STRUCTURENT, RELIENT et TRANSFORMENT les phénomènes qu'ils constatent. Ces trois méthodes de travail sont particulièrement manifestes dans la théorie examinée ici ; même si les énoncés sont restés les mêmes depuis Diophante et Fermat jusqu'à nos jours, cette discipline s'est construite par mutations successives jusqu'à engendrer une partie de l'algèbre et de la géométrie algébrique moderne. Faltings a utilisé des notions issues de presque toutes les branches des mathématiques pour parvenir à ce qui est unanimement considéré comme un tour de force et démontrer la conjecture de Mordell, vieille de soixante ans. Il s'agit d'un résultat essentiel dans le domaine ouvert par le grand théorème de Fermat.

Résolution de la conjecture de Mordell

Le mathématicien allemand Gerd Faltings a obtenu une médaille Fields en 1986 pour avoir démontré la conjecture posée par le mathématicien anglais Louis Mordell en 1922. Cette conjecture était approximativement la suivante :

une équation diophantienne à deux variables n'a qu'un nombre fini de solutions (mises à part deux familles d'équations connues).

On va maintenant préciser le sens de cet énoncé. Une équation diophantienne est une équation dont les coefficients et les inconnues sont des nombres entiers ou rationnels. En voici quelques exemples :

Diophante I	:	$x^2 + y^2 = 1$	(degré 2)
	II	$y^2 = x^3 - 2$	(degré 3)
	III	$y^2 = x^6 + x^2 + 1$	(degré 6)
Fermat F_n	:	$x^n + y^n = 1$, n entier ≥ 3	(degré n)

De façon générale, résoudre un problème d'analyse

diophantienne consiste à trouver les solutions d'une équation

$$f(x,y) = 0$$

où $f(x,y)$ est un polynôme irréductible à deux variables à coefficients rationnels, comme dans les exemples ci-dessus.

Ce genre de question n'a pas toujours été considéré comme sérieux : au XIX^e siècle, par exemple, ce type de problème a fait partie des "mathématiques amusantes".

L'équation $f(x,y) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique plane : l'étude de telles équations est du ressort de la géométrie. C'est Newton qui a RELIE la notion d'équation (venant de l'arithmétique et de l'algèbre) et la notion de courbe (venant de \mathbb{R} géométrie).

Le degré de la courbe mesure sa complexité, mais de façon assez imprécise. Poincaré a utilisé la notion de genre, qui vient de la géométrie. Une courbe de genre g a au plus $g+1$ morceaux lorsqu'on la dessine. La courbe de Fermat F_n est de genre $g = (n-1)(n-2)/2$.

Transformation du problème

C'est avec les notions de degré (Diophante), puis de genre (Riemann) qu'on a CLASSIFIE la catégorie des équations algébriques : le passage du degré au genre est une MUTATION.

Les courbes de genre 0 sont les coniques. Leurs solutions sont décrites par des polynômes $x = x(t)$ et $y = y(t)$: c'est le cas du cercle défini par l'équation I. On sait résoudre ces équations depuis Diophante par la "méthode de la corde".

Les courbes de genre 1 sont les cubiques régulières, comme par exemple la courbe d'équation II. Pierre de Fermat s'est rendu compte au XVII^e siècle que certaines de ces équations n'avaient pas de solution : c'est le cas de l'équation de Fermat de degré 3 ; le problème SE TRANSFORME par la découverte d'équations sans solution. Le "grand théorème de Fermat" est une conjecture : Fermat a affirmé sans donner de preuves que l'équation générale de Fermat de degré n n'a aucune solution avec $xyz \neq 0$.

Ensuite, Poincaré a établi que l'ensemble des solutions d'une équation de genre 1 est un groupe avec un nombre fini de générateurs.

L'équation II a une infinité de solutions, toutes déduites de la solution $x=3, y=5$.

Les courbes qui ne sont ni des coniques ni des cubiques sont de genre au moins 2, par exemple la courbe d'équation III (solution $x=1/2, y=9/8$) et l'équation générale de Fermat de degré n .

Par ANALOGIE avec les courbes de genre 1, Weil a associé des groupes aux courbes de genre au moins 2, leurs "jacobiniennes" : cette notion venait de la théorie du calcul des primitives (intégrales abéliennes).

Et changement du **point** de vue

Il y a la forme de l'équation, et il y a le champ où on l'étudie. En analyse diophantienne, on cherche les solutions dans un corps de rationalité donné : on veut que les solutions soient par exemple dans le corps des nombres rationnels (les fractions), ou dans un corps de fonctions, dans un corps fini, etc.

La géométrie algébrique moderne (Weil, Zariski, Serre, Grothendieck, Deligne) étudie une courbe "simultanément" dans tous les corps de rationalité (sur les entiers, sur les corps finis, etc.)

Ceci a donné lieu à un profond CHANGEMENT de point de vue, et a permis de développer de fructueuses ANALOGIES entre ce qui peut se passer dans des corps de rationalité différents.

En outre, la théorie des équations diophantiennes, qui fut à la base de l'invention de l'algèbre, a engendré *ex nihilo* pour les besoins du théorème de Fermat la théorie moderne des idéaux.

On peut énoncer maintenant le théorème de Faltings de façon plus précise :

Une courbe de genre au moins 2 n'a qu'un nombre fini de points rationnels.

Ainsi, l'équation de Fermat de degré n n'a qu'un nombre fini de solutions.

La conjecture de Mordell était déjà démontrée pour les corps de fonctions. Pour obtenir ce théorème, Faltings a adapté cette

démonstration par ANALOGIE, en CONNECTANT ce schéma de démonstration avec d'autres ingrédients : propriétés des courbes sur des corps finis, outils issus de l'analyse et de la géométrie, etc. Il a ainsi obtenu sept résultats jugés fondamentaux, et démontré deux autres conjectures, REGROUPANT ainsi des notions éparses en une théorie complète, dont la portée dépasse de loin ce dont Mordell pouvait même rêver. De Mordell à Faltings, en passant par Weil, la théorie a été complètement TRANSFORMÉE.

A ce propos, on peut prendre l'image suivante. En faisant appel à l'étymologie, le grec $\piροβλημα$ signifie cap, *promontoire*. Lors de l'étude d'un problème, il s'agit en effet pour le mathématicien, comme pour le navigateur, d'atteindre ou de dépasser un point donné ; pour doubler le cap, il faut louvoyer dans des directions imprévues ; lorsque ce point est atteint, on découvre de nouvelles perspectives.

Faltings n'a pas été seul dans cette aventure : il a travaillé en relation étroite avec l'équipe du C.N.R.S. de Géométrie Algébrique de Szpiro.

Depuis 1985, d'autres thèmes de recherche ont eu des incidences significatives sur le grand théorème de Fermat :

- l'approximation des nombres et la géométrie complexe (Lang, Vojta),
- les courbes "modulaires" (Frey, Serre, Ribet)
- la théorie des nombres premiers (Adleman, Fouvry, Heath-Brown).

Enfin, depuis une vingtaine d'années, l'analyse diophantienne a trouvé de nombreux champs d'application en informatique : en effet un processeur ne travaille que sur un nombre fini d'entiers. Or, sur un corps fini, toute fonction est un polynôme.

Ainsi on voit de nos jours l'analyse diophantienne intervenir dans les mathématiques discrètes et le codage de l'information : compression, encryption, correction.

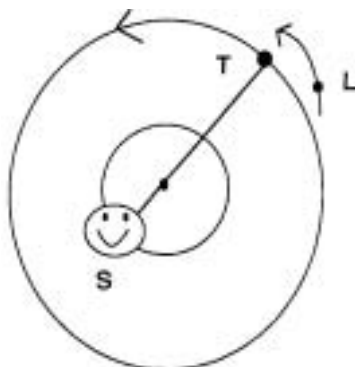
LE PROBLEME DES TROIS CORPS

Le Soleil, la Terre et la Lune

Dans un "essai sur le mouvement des corps cosmiques", V. Beletski note avec raison la chance qu'a eue l'espèce humaine, ses mathématiciens tout au moins, d'apparaître sur une planète gravitant autour d'une étoile non binaire (le soleil) en compagnie d'autres planètes fort éloignées. En première approximation, tout se passe en effet comme si chaque planète était en tête-à-tête solitaire avec le soleil, d'où les ellipses de Kepler et la possibilité de la découverte par Newton de la loi de l'attraction universelle dont on peut effectivement déduire ces dernières. Tout va donc pour le mieux tant que deux corps seulement sont en présence ! Dès qu'il y en a trois, la description, même qualitative, des mouvements impliqués par les équations de Newton devient une tâche gigantesque, et ce "problème des trois corps", dont Poincaré a fait germer la théorie des "Systèmes dynamiques" est à l'origine de grands pans de mathématique "pures" qu'il continue périodiquement à vivifier et qui, en retour, ont profondément modifié sa forme.

Prenons par exemple la caricature la plus simple du problème qui reste signifiante, le problème restreint circulaire **plan** : évoquant entre autres les noms prestigieux d'Euler, Hill, Poincaré, Birkhoff, il s'agit d'une situation dont la simplicité apparente masque au premier abord la richesse¹ : le soleil et la terre décrivent dans un même plan des cercles à vitesse angulaire uniforme autour de leur centre de gravité, et un corps de masse nulle (appelons-le la lune) se promène dans ce plan, par exemple autour de la terre. Que l'une des masses soit supposée nulle ne doit pas nous inquiéter (les équations de Newton gardent un sens après division par cette masse) et signifie simplement que la lune, bien qu'influencée par eux, n'influence pas les mouvements du couple soleil-terre ; ces derniers sont donc "képlériens" et on a supposé qu'ils sont les plus simples possibles (circulaires). Le "problème" est de décrire les mouvements de la lune dans un repère lié au couple soleil-terre.

¹ C'est bien souvent le cas en mathématiques ; pour ne pas trop sortir de notre champ, citons seulement les "modèles de turbulence" issus de la simple itération d'un polynôme du second degré d'une variable, une parabole quoi !



Eh bien, c'est très difficile ! Pour simplifier encore, supposons la lune assez proche de la terre, ce qu'elle est en vérité ; le soleil, en dépit de sa grosse masse, n'a alors qu'un rôle de perturbation du couple terre-lune, ce qui rassure astronomes et mathématiciens (on peut essayer d'extrapoler à partir du cas bien compris de deux corps en "calculant"), mais ne permet pas cependant de "résoudre" le problème.

Tout est dans la forme de **la** question posée

C'est d'ailleurs dans l'ambiguïté du mot "résoudre" que se manifeste le mieux la nature des "grands problèmes", hydres aux multiples têtes qui surgissent de chaque mort chargées de nouvelles provocations. La question de la stabilité du système solaire par exemple : "résolue" par Lagrange qui prouve que les grands axes des orbites des planètes n'ont pas en première approximation de perturbations séculaires (ce qui prouve la stabilité sur un temps long mais pas infini !), puis par Laplace, Poisson, enfin par Arnold qui réussit à montrer que "beaucoup" de données initiales conduisent à des mouvements stables indéfiniment et que le temps de déstabilisation des autres est *a priori* extraordinairement long, elle est dans un certain sens encore ouverte puisqu'on ne sait toujours pas s'il existe effectivement de tels mouvements instables, conduisant à l'échappée d'une planète "vers l'infini" ou à sa collision avec une autre. Tout est dans la forme des questions et celle-ci dépend de la manière dont on pense les objets mathématiques concernés : les équations différentielles exprimant la loi de Newton sont pour les astronomes des expressions sur lesquelles on calcule à l'aide de développements en série (souvent divergents) des solutions approchées que l'on compare aux mouvements

réellement observés. Mais dans l'idée même de loi, et c'est à Kepler qu'il faut ici rendre hommage, il y a la prétention de régir aussi bien les mouvements qu'auraient des corps célestes virtuels que ceux des corps existant réellement ; la concrétisation de cette idée est l'espace de phase (espace des couples position-vitesse ou position-moment), déjà de dimension 4 dans notre caricature du problème de la lune, décomposé (feuilleté) en courbes intégrales disjointes qui correspondent chacune à un mouvement possible (portrait de phase) : aux mouvements périodiques correspondent des courbes intégrales ayant la topologie d'un cercle, aux mouvements quasi-périodiques des courbes intégrales denses dans un tore dont la dimension est le nombre de "périodes", aux mouvements plus compliqués enfin, des courbes intégrales dont la forme, lorsqu'on sait la décrire, fournit les caractéristiques du mouvement. La notion classique de "système d'équations complètement intégrable" (i.e. dont on peut écrire les solutions en termes d'intégrales de fonctions connues) se traduit dans l'espace des phases par une géométrie très simple : la presque totalité de celui-ci se décompose en effet en tores de dimension moitié, habités chacun par une famille de courbes intégrales, périodiques ou quasi-périodiques. Quant aux équations de Newton, elles apparaissent comme version infinitésimale de cette image, champ de vecteurs tangents en chaque point à la courbe intégrale passant par ce point. Que position et moment jouent des rôles symétriques est attesté par l'extraordinaire liberté qu'on a de les mélanger dans les changements de coordonnées permis par la théorie "hamiltonienne", issue de l'optique, mais au domaine d'application immense par la grâce de la nature variationnelle de la mécanique.

La topologie de l'espace de phase (contraintes a priori) et la géométrie des courbes intégrales (nature des mouvements) devient maintenant essentielle. De nouvelles questions surgissent à partir des travaux fondateurs de Poincaré, non seulement l'existence de mouvements périodiques (les célèbres orbites lunaires de Hill par exemple) mais aussi, lorsque le système n'est pas complètement intégrable, la possibilité ou non d'approcher aussi près que l'on veut chaque mouvement possible par un mouvement périodique, l'existence et la nature des mouvements plus généraux et en particulier celle des "orbites homoclines transverses" dont l'extrême complexité décourageait même Poincaré qui en avait pourtant saisi toute l'importance, les propriétés de type statistique enfin (théorie ergodique, problèmes d'entropie).

Des déguisements multiples

Les méthodes changent en conséquence : les belles recherches actuelles de "géométrie symplectique" ont une bonne part de leur origine dans l'étude par Poincaré et Birkhoff des solutions périodiques du problème restreint des trois corps ; des surfaces de section, introduites par Poincaré dans ce même problème, vient l'étude, si vivante aujourd'hui, des systèmes dynamiques à temps discret ; et il faudrait parler également de topologie, de topologie algébrique, de théorie des groupes...

L'analyse, cependant, ne perd rien de ses droits ; témoins les célèbres théorèmes de Kolmogorov, Arnold, et Moser affirmant l'existence de "beaucoup" de solutions quasi-périodiques dans les systèmes proches des systèmes "complètement intégrables" déjà évoqués, en particulier dans l'exemple que nous avons choisi : une grande partie des tores remplis de courbes intégrales de l'approximation intégrable résistent, bien que légèrement perturbés, à la perturbation. Les implications de ces théorèmes sont multiples : à la base des résultats de stabilité d'Arnold, ils ont également permis de réfuter l'"hypothèse ergodique" de Boltzman² en montrant qu'il y avait plus de régularité dans les systèmes hamiltoniens, ceux régis par les équations de Newton en particulier, qu'on n'aurait pu le suspecter. Faisant intervenir des hypothèses de non-résonance de nature arithmétique sur les "périodes", ils sont une victoire étonnante sur le "problème des petits dénominateurs", l'un des plus difficiles de toute la mécanique céleste.

On ne peut sous-estimer la descendance du problème des trois corps et plus spécifiquement du problème lunaire : une grande partie de la théorie qualitative des équations différentielles (systèmes dynamiques) en est issue (le reste remontant essentiellement aux travaux de Van der Pol sur les oscillations électriques), ainsi que pas mal de topologie, de topologie algébrique, d'analyse fonctionnelle et de géométrie. Je terminerai en indiquant un autre aspect de ce problème protéiforme aux nombreux déguisements : après "régularisation" des collisions (Levi-Civita, Moser), le problème des deux corps se transforme, lorsque l'énergie est négative, c'est-à-dire

2 qui, proprement reformulée, posait qu'en général une courbe intégrale passe arbitrairement près de chaque état ayant une énergie donnée.

les mouvements considérés elliptiques, en le "flot géodésique" sur la sphère ronde de dimension deux, chaque mouvement képlérien correspondant à une géodésique de la sphère, c'est-à-dire à un grand cercle. Notre caricature du problème de la lune se révèle alors très semblable au problème de la nature des géodésiques (lignes de plus court chemin) d'une sphère un peu cabossée. Alternativement, on peut remplacer celles-ci par les trajectoires de la boule dans un billard dont le bord est une ellipse un peu cabossée ; les théorèmes de Kolmogorov, Arnold et Moser se traduisent alors par l'existence de beaucoup de caustiques pour ces trajectoires ! Il y a plus de choses dans le ciel, etc., etc.

LES NOMBRES PREMIERS : LA SPECULATION ET LA BANQUE

Décrire les nombres premiers

La structure additive des entiers positifs est simple à décrire puisqu'un seul élément (l'unité) suffit à les engendrer tous. Que dire de la structure multiplicative ? Cette question dont débattait déjà l'école pythagoricienne reçoit une réponse d'Euclide qui établit vers l'an 300 avant notre ère, l'existence et l'unicité de la factorisation en nombres premiers. Mais peut-on décrire les nombres premiers ? C'est un problème qui a reçu des réponses partielles au cours des âges, depuis Euclide jusqu'à nos jours. A travers une étude sommaire de cette question, on tente de cerner l'activité du mathématicien.

La toute première remarque qu'impose le résultat d'Euclide est l'intérêt que porte le mathématicien aux rapports entre les objets qu'il étudie. On peut ajouter, mais c'est là un point de vue beaucoup plus récent, que ces rapports eux-mêmes sont l'essentiel de son intérêt.

Pour décrire une famille, une idée simple est d'en établir la liste : Euclide prouve qu'aucune liste finie de nombres premiers n'est exhaustive, car on peut toujours trouver un nombre premier qui n'est pas dans la liste et l'y ajouter. Il y a là matière à réfléchir sur la conception de l'infini (actuel ou potentiel), mais pour notre propos nous en retiendrons que cette démonstration n'a pas vieilli d'un iota en vingt-trois siècles : sa correction, sa clarté et son élégance sont toujours actuelles.

Quand **les** mathématiques **se** modélisent elles-mêmes

A la jonction des XVIII^e et XIX^e siècles, Gauss et Legendre conjecturent la validité de formules empiriques donnant le nombre de

nombres premiers au plus égaux à un réel donné x (sans entrer dans plus de détails, jusqu'à x il y a environ $x/\log x$ nombres premiers). Ce résultat ne sera démontré qu'à la fin du XIXe, soit un siècle plus tard, par Hadamard et de La Vallée Poussin, en faisant appel à une théorie mathématique développée au cours du XIXe siècle : les fonctions analytiques d'une variable complexe. Comment ? En suivant Euler, au milieu du XIXe siècle, Riemann construit une fonction associée à une suite dont les propriétés analytiques reflètent les propriétés arithmétiques de cette suite : il utilise cette fascinante propriété des mathématiques de pouvoir se modéliser elles-mêmes. Au cours de son travail, il mentionne incidemment une propriété que doivent posséder les zéros de la fonction (dite zêta) qu'il a construite : la connaissance et la démonstration de cette propriété, la célèbre hypothèse de Riemann, pourrait bouleverser les tendances actuelles de la recherche en mathématiques. Caractéristique de l'esprit des mathématiques est la démarche de Riemann qui va chercher la solution d'un problème dans un autre champ que celui sous-tendu par l'énoncé du problème.

Mathématiques pures ou appliquées ?

Une autre voie, pour décrire la famille des nombres premiers, consiste à disposer de critères permettant de déterminer aussi simplement que possible si un nombre donné est premier ou non. Cette question, étudiée depuis l'Antiquité, a reçu un regain d'intérêt il y a une dizaine d'années lorsque Rivest, Shamir et Adleman ont construit des systèmes de codages (codes à clef publique) basés sur la factorisation en nombres premiers. Des théories mathématiques de plus en plus élaborées (par exemple les courbes elliptiques) sont utilisées pour étudier les tests de primalité ; on en profitera pour remarquer que les grands problèmes servent d'étalon pour jauger la puissance d'une théorie.

On conclura sur une réflexion inspirée elle aussi par l'application des nombres premiers aux systèmes de codage, effectivement utilisés, notamment par les banques. La théorie des nombres est-elle une science fondamentale ou finalisée ? Ou bien n'y-a-t-il aucune distinction réelle entre mathématiques pures et appliquées ?

IV. LES REACTIONS DU PUBLIC

Qu'est-ce qu'un grand problème de mathématiques ?

A. Douady cite l'exemple de l'hypothèse de Riemann, de la conjecture de Mordell (et du problème de Fermat), et du théorème des quatre couleurs pour remarquer que si les premiers ont donné lieu à des recherches fécondes, la démonstration du théorème des quatre couleurs n'a eu aucune retombée.

Il apparaît ainsi que la grandeur d'un problème est liée essentiellement à sa fécondité. En ce sens le problème des quatre couleurs n'a pas été un grand problème mais seulement un problème célèbre... mais cette constatation n'était pas possible avant sa résolution !

Il ne faut pas oublier non plus qu'il existe aussi des petits problèmes très compliqués...

Que signifie "résoudre" ?

Une longue discussion entre deux auditeurs industriels à propos du problème des trois corps montre que "résoudre" ne signifie pas la même chose pour tout le monde. Certains se contentent d'une bonne approximation, d'autres veulent une théorie complète ou du moins prédictive...

Et résoudre c'est aussi "faire de la cuisine", ce qui est indispensable quand on est dans le brouillard.

Le facteur temps

On peut noter deux types d'évolution d'un problème : soit il sommeille plus ou moins longtemps avant de connaître un bouleversement important, soit on le croit résolu et il voit brusquement son intérêt rebondir dans une autre direction.

Par exemple, à propos du problème des trois corps, Delaunay au milieu du XIXe siècle a mis 20 ans à calculer les équations de la Lune, à la satisfaction de tous les navigateurs, et récemment son travail s'est retrouvé à la mode comme moyen de vérification des logiciels de calcul symbolique.

Par exemple encore, les théories de Turing et de Von Neumann sont restées peu connues jusqu'au bouleversement dû à l'apparition des ordinateurs.

Par exemple également le calcul des probabilités introduit par Pascal et Laplace n'a connu que peu de développement jusqu'à Kolmogorov.

Ne pas oublier la perspective historique

D. Perrin semble penser qu'il n'y a pas actuellement apparition de grandes théories comme le calcul différentiel ou les fonctions analytiques.

F. Dress lui objecte que, après coup et avec le recul de l'histoire, il est plus simple de faire le diagnostic, mais que le calcul infinitésimal a mis un siècle à se dégager.

P. Cartier remarque qu'il y a actuellement une explosion de théorèmes mathématiques grâce au contact avec les autres disciplines (comme la mécanique). On ne sait toujours pas résoudre certaines questions (comme l'intégrabilité des systèmes) mais on voit peu à peu émerger des nouvelles théories qui ne seront formalisées que plus tard.

La phase de formalisation est indispensable pour repartir de l'avant. La conjecture de Mordell a été résolue grâce au formalisme développé en France 15 ans auparavant.

Et l'enseignement ?

J.L. Ovaert se demande où l'on entend ce genre de discours, tant dans l'enseignement supérieur que secondaire. Nulle part on n'éclaire notre enseignement à l'aide de grands problèmes ; or cela est nécessaire pour donner une image vivante des mathématiques, pour faire vivre l'enseignement des mathématiques.