MATHEMATIQUES ET MATHEMATICIENS EN ECONOMIE ET EN FINANCES

par

J.-M. Lasry

(Professeur à l'université de Paris IX)

I. INTRODUCTION

Une concession à l'actualité boursière, avec une ironie de circonstance, me fournit l'occasion de situer le débat sur le rôle de l'économie théorique et de l'économie mathématique.

Lorsqu'un barrage (inauguré naguère comme le fleuron prestigieux de la meilleure technologie) s'écroule à la stupéfaction générale, on ne remonte pas la chaîne des responsabilités jusqu'à Archimède et on ne demande pas son avis au directeur d'un laboratoire de physique théorique qui d'ailleurs n'est consulté ni avant ni après la catastrophe, ni comme responsable ni comme expert.

Effectivement il existe une économie théorique, une économie mathématique et une économie appliquée, comme il existe une physique théorique, une physique mathématique et des sciences physiques pour l'ingénieur. Dans chacun de ces compartiments de la science et de la technique économique, les mathématiques et les mathématiciens interviennent, important comme ailleurs des méthodes de calcul et un style de pensée, avec comme partout des avantages : rigueur, précision, concision, quantification,... et (parfois) des inconvénients : opacité pour les non-mathématiciens, risque de voir prévaloir (parfois) le souci de l'esthétique intellectuelle sur celui de la pertinence et de l'efficacité !

Cependant, deux différences séparent l'économie de la physique, et par voie de conséquence, différencient l'intervention des mathématiques et des mathématiciens dans ces deux domaines : l'économie est une science humaine ; l'économie est une science jeune.

En économie, comme dans la plupart des sciences humaines, l'homme – agent économique - n'est pas, ne peut pas être assimilé à un objet ou à une machine : non seulement il maximise son utilité - ce que peut faire une machine - mais il raisonne, il anticipe le comportement des autres, use de son libre arbitre, etc. Les concepts, les théories économiques, la notion même de théorie en économie, portent la marque plus ou moins visible de cette présence de l'homme en tant que tel. On en retrouve la trace dans les outils mathématiques utilisés. Ainsi marquée de la présence de l'homme dans ses prémices, la science économique l'est aussi à travers les contraintes éthiques qui déterminent les méthodes de recherche. L'expérience est exclue, l'observation est difficile. Le discours théorique lui-même n'est pas sans danger, car il arrive qu'un énoncé partiel ou un développement hypothétique avancé pour les besoins du raisonnement, devienne un slogan privé du contexte qui lui donnait son sens initial. Les mathématiciens, lorsqu'ils fournissent à l'économiste, théoricien ou appliqué, les méthodes mathématiques et les outils quantitatifs dont il a besoin pour ses modèles, sont pris avec lui dans la dimension humaine de cette science, avec ses enjeux sociaux, collectifs et individuels, et ne peuvent éviter quelques réflexions épistémologiques et quelques choix éthiques.

L'économie est une science jeune (comparée à la physique) ; mille détails témoignent de cette jeunesse, par exemple : l'élaboration récente de concepts fondamentaux, la vivacité des querelles savantes, la confusion des genres (quelles moues dubitatives susciteraient dans le public, les théories d'un théoricien de la finance qui perdrait à la bourse) ; au contraire la réputation de Newton d'excellent expert en gravitation n'a pas pâti des mauvais rapports qu'il entretenait dans sa vie personnelle avec ce phénomène : il n'était pas funambule et en outre il recevait parfois des pommes sur la tête, (ce qui lui donnait à penser sur la gravitation). Un autre indice de la jeunesse de la science économique est la place limitée qu'y tiennent actuellement les mathématiques. A vrai dire cette place est déjà importante. Mais à mesure que les économistes vont plus avant dans la richesse et la complexité des phénomènes économiques, leurs besoins de mathématiques s'accroissent, en qualité et en quantité.

Il y a là un champ considérable pour les mathématiques et les mathématiciens à venir.

II. ECONOMIE MATHEMATIQUE : DEVELOPPEMENTS **RECENTS ET** PERSPECTIVES par Jean-Charles ROCHET, ENSAE et Ecole Polytechnique.

C'est au XIXe siècle, avec Ricardo et surtout Marx, qu'apparaît l'Economie Mathématique, c'est-à-dire la nécessité d'une formalisation mathématique de certains problèmes économiques. Mais c'est la théorie de l'équilibre général qui, sous l'impulsion de Von Neumann avant guerre, puis Arrow et Debreu dans les années cinquante, va donner ses premières lettres de noblesse à cette discipline. Pour la première fois, une théorie économique riche peut être complètement formalisée grâce à des outils mathématiques puissants. Le revers de la médaille c'est que le succès rencontré par cette théorie va populariser, aussi bien chez les mathématiciens que chez les économistes, une identification abusive entre l'Economie Mathématique toute entière et la seule théorie de l'Equilibre Général.

Pourtant, la formalisation mathématique s'est aussi révélée extrêmement féconde, depuis une quinzaine d'années, dans les nouvelles voies de recherche qui ont été explorées. Certaines prolongent le modèle de Arrow et Debreu (rendements croissants, marchés financiers incomplets, équilibres en anticipations rationnelles,...), d'autres s'en écartent profondément (équilibres à prix fixes, théorie des contrats, modèles à information asymétrique).

Ces notes ne visent bien sûr pas à donner un panorama complet de la recherche en Economie Mathématique de ces vingt dernières années. Nous avons plutôt cherché un petit nombre d'illustrations de la variété des problématiques et des techniques mises en jeu. Après quelques éléments de classification (partie 1), je donne plusieurs exemples historiques de l'utilisation de techniques mathématiques en Economie (partie LI). Les principales extensions récentes du modèle de Arrow et Debreu sont ensuite présentées (partie III). Dans la partie IV nous analysons plus en détail un problème issu de la *théorie* des *incitations*, branche nouvelle de l'Economie Mathématique qui s'oppose à la théorie de l'équilibre général en ce qu'elle s'intéresse à des situations où l'information des agents économiques est incomplète. La recherche de contrats non manipulables conduit à la résolution d'une équation hyperbolique non linéaire d'un type nouveau. Enfin dans la partie V nous montrons le lien étroit entre les méthodes de valorisation d'actifs financiers par arbitrage et des propriétés classiques à l'analyse convexe (lemme de Farkas).

1. Un essai de classification

Le premier élément de classification en économie est le point de vue adopté, qui peut être macroéconomique (quand on s'intéresse à la détermination des "agrégats" de la Comptabilité Nationale : Revenu National, Taux de Chômage, niveau général des prix) ou rnicroéconornique (quand on s'intéresse au comportement des agents économiques individuels, à la répartition des revenus dans l'économie, à la détermination des prix relatifs des différents biens et services..,).

A l'opposition microéconomie-macroéconomie se superpose comme ailleurs une opposition théorie-applications ainsi qu'une classification en fonction du sujet de l'étude. S'intéressant au marché du travail par exemple, on pourra étudier l'effet des déficits publics sur le taux de chômage (macroéconomie théorique) ou l'importance des qualifications dans l'emploi des jeunes (microéconomie appliquée).

Les méthodes mathématiques de l'Economie sont à classer en deux catégories très différentes : celles qui concourent a l'élaboration des modèles (Economie Mathématique) et celles qui permettent l'estimation statistique de ces modèles (Econométrie). Nous ne parlerons ici que de la première catégorie. Remarquons pour terminer que c'est surtout en Microéconomie que la modélisation mathématique a, jusqu'ici, vraiment porté ses fruits.

2. L'utilisation de mathématiques en Economie : quelques exemples historiques

Une des questions centrales de la microéconomie est la détermination des prix relatifs : comment expliquer par exemple que le diamant coûte en moyenne un million de fois plus que les pommes de terre ? Nous allons voir plusieurs réponses, données successivement par Ricardo, Marx et Walras, ainsi que leur formulation mathématique.

a - Ricardo et la valeur travail.

D'après Ricardo (Principes *d'Economie* Politique (1817)) c'est la quantité de travail incorporée directement et indirectement dans chaque bien produit qui détermine sa valeur. Mathématiquement : on a N produits repérés par un indice des biens $i=1,...,N$. Pour produire une unité de bien j, il faut a_{ij} unités de chacun des biens $i=1,...,N$ et b_j unités de travail. On cherche alors un système de prix $\pi_1,...,\pi_N$, positifs, et compatibles avec la définition de Ricardo :

(1) $\forall\, j=1,\dots,N \qquad \pi_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\pi_i + b_j$

soit vectoriellement :

(2) $\exists\,?\ \pi \in \mathbb{R}_+^N, \qquad \pi(I-A) = b$

Proposition *1.* Soit A une matrice N x N à coefficients ≥ 0. On a équivalence de

(3) $\exists\, x \in \mathbb{R}_+^N, \qquad x > A(x)$

(4) $(I-A)^{-1}$ existe et est à coefficients ≥ 0.

N.B. La condition **(3)** a une interprétation économique simple : elle signifie que la matrice **A** est "productive", c'est-à-dire qu'il est possible d'obtenir une production nette positive de chacun des N biens.

b - Marx et les prix de production

D'après Marx (Le Capital (1848)) les prix vont s'établir à un niveau où s'égalisent les taux de profit dans les différentes branches. Mathématiquement on désigne par r ce taux de profit, par p le vecteur des prix de production, le taux de salaire étant normalisé à 1. On doit donc avoir :

(5) $\forall\, j, \qquad p_j = (1+r)\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}p_i + b_j\right)$

soit vectoriellement :

(6) $p = (1+r)\,({}^t pA+b).$

Proposition *2.* Sous les hypothèses de la proposition 1, il existe un $r_0 > 0$ tel que :

$\forall\, r \in [0,r_0[\ ,\ \left(\frac{I}{1+r} - A\right)^{-1}$ existe et a tous ses coefficients positifs.

On a alors

(7) $p = {}^t b\left(\frac{I}{1+r} - A\right)^{-1}$

c - Walras et la loi de l'offre et **la** demande

D'après Walras (La théorie mathématique de la richesse sociale (1873)) les prix s'établissent à un niveau qui égale l'offre et la demande sur chacun des marchés. Mathématiquement on normalise le vecteur des prix :

$$(8) \quad p \in \mathbb{P} = \left\{ p \in \mathbb{R}^N_+ / \sum_{i=1}^{N} p_i^2 = 1 \right\}$$

et on définit pour tout p de IP le vecteur d'excès de demande

$$(9) \quad Z(p) = D(p) - O(p)$$

égal à la différence entre demande et offre au prix p en chacun des biens $i=1,\ldots,N$. On montre alors la loi de Walras.

$$(10) \quad \forall p \in \mathbb{P}, \qquad \langle p, Z(p) \rangle = 0$$

qui implique que Z définit un champ de vecteurs tangents à la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Finalement on montre que Z "pointe vers l'intérieur" sur le bord de $\mathbb{P}$:

$$(11) \quad \forall \bar{p} \in \partial\mathbb{P}, \ \forall i, \qquad \bar{p}_i = 0 \Rightarrow Z_i(\bar{p}) \geq 0$$

Proposition **3.** Soit $Z \in C^1(\mathbb{P}, \mathbb{R}^N)$ qui vérifie *(10)* et (11). Alors Z a un zéro :

$$\exists p^* \in \mathbb{P}, \qquad Z(p^*) = 0$$

La formalisation complète des idées de Walras, dont la proposition **3** ne décrit que l'un des aspects, est due à Arrow et Debreu. On le désigne sous le nom de théorie de l'équilibre général. Pour une présentation très claire, on pourra consulter l'ouvrage de Debreu *(Théorie de la Valeur,* Dunod, 1984). Les développements et extensions récentes, que nous présentons très brièvement dans la partie III, sont exposés dans Mas-Cole11 *Theory of General Economic Equilibrium*, Cambridge University Press *(1*986).

3. Développements et extensions **du** modèle Arrow-Debreu

Les techniques utilisées à l'origine par Arrow et Debreu étaient essentiellement de deux types : analyse convexe et théorèmes de point fixe à la Brouwer.

Sous l'impulsion de Debreu lui-même d'abord puis de Balasko, l'emploi de méthodes différentielles (Théorème de Sard, transversalité, théorie du degré) a permis d'établir de façon élégante les propriétés globales de l'ensemble des équilibres.

Le théorème d'existence de l'équilibre a été généralisé (Bewley, Mas-Colell) à des modèles dynamiques et/ou stochastiques nécessitant l'emploi d'outils plus sophistiqués : treillis de Banach, théorème de Schauder. D'autres techniques d'analyse non-linéaire interviennent dans les économies avec rendements croissants.

Le développement récent le plus spectaculaire est sans doute la preuve, donnée par Duffie et Shafer, de l'existence générique d'un équilibre dans une économie financière avec marchés incomplets. Cette preuve utilise de façon intéressante les propriétés des variétés grassmaniennes ainsi que la théorie du degré modulo 2.

Enfin; l'emploi de techniques récentes de Systèmes Dynamiques (bifurcations, dynamique symbolique, théorème de Sarkovski'i...) a permis d'apporter un point de vue nouveau à la théorie des cycles économiques (Grandmont). L'article de P.A. Chiappori ci-après traite d'une problématique très liée, celle des "taches solaires".

4. Une équation hyperbolique non-linéaire de la théorie **des** contrats

Parmi d'autres restrictions, les résultats d'Arrow-Debreu requièrent la concurrence parfaite sur les marchés, et l'information complète de tous les agents économiques. A l'autre extrême se trouve la situation d'un monopole bilatéral en information asymétrique : prenons l'exemple d'un contrat de fourniture qui lie deux partenaires commerciaux, appelés par simplicité acheteur et vendeur. Ce contrat stipule la quantité q à livrer par le vendeur et le montant monétaire m à verser par l'acheteur, en fonction des fluctuations de l'environnement économique, représentées par deux paramètres :

b : le paramètre de bénéfice de l'acheteur
c : le paramètre de coût du vendeur.

Le couple (b,c) correspond aux réalisations d'une variable aléatoire que nous supposerons supportée par $\Omega = [0, 1]^2$. Un contrat de fourniture c'est donc :

$$(q,m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2_+$$

Pour fixer les idées nous choisirons une spécification linéaire-quadratique des fonctions de bénéfice des deux partenaires :

(12) $U(b,c) = b\, q(b,c) - \frac{1}{2}\, q^2(b,c) - m(b,c)$ pour l'acheteur

(13) $V(b,c) = m(b,c) - c\, q(b,c) - \frac{1}{2}\, q^2(b,c)$ pour le vendeur.

Nous supposerons que chaque agent observe la réalisation de son propre paramètre de coût ou de bénéfice, mais n'a aucune information sur celui de son partenaire. Celui-ci pourrait donc être tenté de manipuler l'information pour accroître son bénéfice. Nous nous intéressons ici à la caractérisation des contrats immunisés contre ces possibilités de manipulation.

Définition 1. On dit que le contrat $(q,m) : \Omega \to \mathbb{R}_+^2$ est non-manipulable si et seulement si :

(14) $\forall\,(b,c) \in \Omega\ ,\quad \forall\, b' \in I\ ,\qquad U(b,c) \geq b\, q(b',c) - \frac{1}{2}\, q^2(b',c) - m(b',c)$

(15) $\forall\,(b,c) \in \Omega\ ,\quad \forall\, c' \in I\ ,\qquad V(b,c) \geq m(b,c') - c\, q(b,c') - \frac{1}{2}\, q^2(b,c')$

(16) $\forall\,(b,c) \in \Omega\ ,\quad U(b,c) \geq 0\ ,\qquad V(b,c) \geq 0\ .$

L'inéquation (14) exprime que l'acheteur ayant observé son paramètre de bénéfice b, n'a pas intérêt à faire une fausse déclaration b', ceci indépendamment du paramètre c du vendeur. L'inéquation (15) exprime la condition symétrique. Enfin, les inégalités (16) assurent qu'aucun des partenaires n'a intérêt à rompre le contrat.

Proposition 4. Soit $q : \Omega \to \mathbb{R}_+$ donné. Il existe $m : \Omega \to \mathbb{R}_+$ tel que (q,m) est non manipulable, si et seulement si :

(17) q est croissante en b et décroissante en c

(18) $\forall\,(b,b) \in \Omega\ ,\quad q(b,b) = 0$

(19) $\forall\,(b,c) \in \Omega\ ,\quad (b-c)q(b,c) - q^2(b,c) = \int_c^b \{q(s,c)+q(b,s)\}ds$

N.B. A cause de (17) le membre de droite de l'équation intégrale (19) a toujours un sens. Par ailleurs, si q est suffisamment régulière, (19) a une traduction en termes d'E.D.P. :

(20) $(b-c-2q)\,\dfrac{\partial^2 q}{\partial b\ \partial c} - 2\,\dfrac{\partial q}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial c} = 0$

Enfin, on peut également trouver une formulation équivalente de (19) par un système hyperbolique. On pose pour cela :

$$\left\{\begin{array}{l} b = \frac{1}{2}(x+t) \\ c = \frac{1}{2}(x-t) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} U + V = S \\ U - V = D \end{array}\right.$$

on obtient

$$\begin{array}{ll} (21.1) & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial D}{\partial x} + [t \pm \sqrt{t^2 - 4S}\,] \\ \dfrac{\partial D}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial x} \end{array}\right. \\ (21.2) & \end{array}$$

avec la condition initiale :

$$(22) \quad \forall\, x,\ S(0,x) = D(0,x) = 0$$

L'inconvénient de (21) vient du caractère multivoque du second membre de la pemière équation. On peut appliquer des méthodes de point fixe d'opérateurs croissants à l'équation avec "-" (Lasry-Schatzman). On obtient alors une infinité de solutions assez régulières à (21), (22). L'intuition économique fournit deux familles de solutions singulières, aux propriétés plus intéressantes (Rochet).

5. La valorisation d'actifs financiers par arbitrage

La méthode la plus connue, due à Black et Scholes, a entraîné un engouement sans précédent de la part des financiers pour les Equations Différentielles Stochastiques et le calcul d'Ito. Je me contenterai ici de donner le principe général de ces méthodes.

Soit un marché financier où s'échangent N titres, repérés par un indice $j=1,\dots,N$, et dont les rendements sont aléatoires. On suppose pour simplifier qu'il n'existe qu'un nombre fini d'états du monde possibles, repérés par un indice $i=1,\dots,M$. On note :

d_{ij} = valeur de liquidation (demain) de l'actif j dans l'état du monde i

p_j = prix (aujourd'hui) de l'actif j.

On appellera portefeuille un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^N$, noté x. Remarquons que certaines des coordonnées de x peuvent être négatives, ce qui veut dire que les ventes à découvert sont autorisées.

L'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage exprime simplement qu'un portefeuille qui a une valeur de liquidation positive ou nulle dans tous les états du monde (demain) a forcément un prix positif ou nul (aujourd'hui). Mathématiquement :

$$(23)\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\forall i,\ \sum_{j=1}^{N} d_{ij}x_j \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} p_j x_j \geq 0\right).$$

Proposition (Farkas). La condition *(a)* équivaut à l'existence de $q \in \mathbb{R}_+^M$ tel que:

$$\forall j,\quad p_j = \sum_{i=1}^{M} d_{ij} q_i$$

Interprétation Economique : Les q_i sont des coefficients d'"actualisation" généralisés qui permettent de définir la valeur théorique d'un actif financier quelconque comme la somme actualisée de ce qu'il rapporte dans tous les états du monde.

6. Conclusion

Les trente dernières années ont donc vu une certaine "explosion" de l'utilisation de techniques mathématiques en Economie. Contrairement à ce que d'aucuns avaient pu claironner, l'Economie Mathématique a montré qu'elle n'était pas au service d'une idéologie particulière mais bien au contraire qu'elle était le crible obligé par lequel toute théorie économique devait passer avant de prétendre à la rigueur. Enfin, bousculant les idées reçues de quelques-uns, l'Economie Mathématique a fait la preuve qu'elle pouvait être la source de problèmes mathématiques actuels, c'est-à-dire nouveaux et intéressants.

III. ANTICIPATIONS RATIONNELLES, THEORIES AUTOREALISATRICES ET MODELES A "TACHES SOLAIRES"

par P.A. Chiappori

L'une des mutations les plus profondes de la science économique, au cours des quinze dernières années, est liée à l'introduction de la notion ***d'anticipations rationnelles.*** On sait, depuis longtemps, que le comportement des agents économiques, à une date donnée, est largement influencé par les anticipations que ces agents formulent sur le futur. Jusqu'au début des années 70, cependant, les problèmes d'anticipations étaient abordés de deux points de vue radicalement différents (et, en un sens, également peu satisfaisants). D'une part, les micro-économistes utilisaient le cadre de l'équilibre général, défini dans l'après-guerre par K. Arrow et G. Debreu, qui suppose une prise en compte totale de l'incertitude par un système complet de marchés appropriés ; d'autre part, les macro-économistes, théoriciens ou appliqués, formalisaient le plus souvent les anticipations comme "adaptatives", les agents prolongeant simplement les tendances observées par le passé. La première approche, très élégante, reposait cependant sur des hypothèses fortes et irréalistes : à l'inverse, la seconde proposait une modélisation manifestement grossière, et en particulier peu compatible avec la rationalité individuelle des agents. La notion d'anticipation rationnelle, introduite par Muth, puis étendue par Lucas, tente de réconcilier en partie les deux points de vue. Elle suppose que les agents ne sont qu'imparfaitement informés, mais qu'ils traitent l'information dont ils disposent de façon optimale, en un sens statistique fort.

L'approche des anticipations rationnelles a conduit à repenser de nombreux problèmes économiques classiques. L'un des cas les plus spectaculaires est celui de la théorie des fluctuations économiques. Dès 1972, Lucas avait montré qu'une transmission imparfaite de l'information pouvait, dans le nouveau cadre d'analyse, provoquer des fluctuations cycliques de l'activité, fluctuations qu'aucune politique annoncée ne pouvait éliminer. Cependant, l'imperfection des signaux n'est nullement indispensable à l'explication des cycles. Utilisant la théorie des systèmes dynamiques, et notamment les outils liés aux bifurcations, Grandmont (1985) a par exemple montré que pour de nombreux modèles économiques, même très simples, l'hypothèse d'anticipations rationnelles seule pouvait conduire à une multiplicité d'équilibres économiques dynamiques - les uns stationnaires, les autres cycliques. Dans le second cas, les cycles économiques ne sont liés à aucune fluctuation exogène au modèle ; ils sont purement endogènes, et persistant uniquement parce que les agents anticipent leur persistence.

Dans cette ligne d'analyse, se situent également les travaux récents sur les équilibres stochastiques, et notamment les modèles à "taches solaires". On peut en résumer rapidement les principales idées. Prenons une économie à plusieurs périodes, et supposons que les seules informations dont les agents ont besoin à la date t, pour prendre leurs décisions, soient les prix courants ($p_t \in \mathbb{R}^L$), et la distribution de probabilité des prix futurs, notée $d\mu$. Techniquement, le comportement d'ensemble de l'économie est résumé par une fonction de demande excédentaire agrégée $Z(p_t ; d\mu)$ à valeurs dans R^L ; la $l^{ième}$ composante de Z représente, pour le bien l, la différence entre demande totale et offre totale du bien, pour des prix p_t et une distribution dp donnée. En particulier, le système sera en équilibre si $Z(p_t ; dp) = 0$ — égalité traduisant l'équilibre offre-demande sur *tous* les marchés.

On suppose en général que l'économie admet notamment un *équilibre stationnaire*, c'est-à-dire un vecteur $\bar{p}$ tel que $Z(\bar{p}; l\bar{p}) = 0$, $l\bar{p}$ étant la mesure de Dirac en $\bar{p}$. Intuitivement : si les agents sont *certains* que le prix futur sera $\bar{p}$, alors leurs comportements sont tels que le prix qui équilibre le marché aujourd'hui est justement $\bar{p}$. ER particulier, l'économie peut très bien rester perpétuellement en équilibre, le prix étant $\bar{p}$ à chaque période ; elle est alors parfaitement stationnaire.

Venons-en à présent à la notion d'équilibre stochastique. Pour cela imaginons que les agents puissent observer, dans leur environnement, un processus stochastique ("taches solaires") noté (M_t). Ce processus est purement *extrinsèque,* au sens où il n'a *aucune* influence sur les caractéristiques fondamentales de l'économie (préférences, techniques de production, ressources, ...) ; il n'a donc, *a priori*, aucune raison d'influencer l'activité économique.

Supposons, pourtant, que les agents soient d'un avis différent : ils croient que l'état de l'économie (et notamment le prix) est, à chaque période, complètement déterminé par l'état courant du processus. Techniquement, ils ont formulé une "théorie" ϕ, qui associe un prix à chaque état du processus : $\forall t \;\; p_t = \phi(M_t)$.

Intuitivement, de telles croyances sont irrationnelles et, donc, devraient finalement s'avérer fausses. La surprise, justement, est que cette intuition est elle-même incorrecte. La théorie ϕ, si elle est "bien choisie", peut parfaitement s'avérer rationnelle, au sens (fort) où elle prédit *exactement* le prix à chaque période.

Comment expliquer ce paradoxe ? Au travers d'un mécanisme *d'autoréalisatiorz* de la théorie. En effet, faisons l'hypothèse (cruciale) que le phénomène M_t est autocorrélé. Dans ce cas, l'observation de l'état *actuel* du phénomène fournit une information (probabiliste) sur l'état futur. Mais si les agents croient à la théorie, ils en déduisent une information sur les *prix* futurs - information qui modifie leurs décisions. En d'autres termes : deux observations différentes induisent des prédictions différentes, d'où un comportement actuel (et donc un vecteur prix d'équilibre) différent. Enfin, la théorie ϕ est autoréalisatrice si le prix qui, par ce mécanisme, équilibre les marchés quand M_t a été observé, est justement égal à 4 (M_t).

Traduisons ces idées de façon formelle. La distribution des prix futurs, n'est autre, selon la théorie 4, que la distribution de *(p* (M_{t+1}) conditionnelle à M_t. L'équilibre, donc, sera obtenu au prix $p_t = \phi(M_t)$ si et seulement si la fonction est solution de l'équation fonctionnelle :

$$\forall M_t , \quad Z(\phi(M_t) ; d\mu(\phi(M_{t+1})/M_t)) = 0$$

Le problème est donc de résoudre une équation de ce type. La forme exacte de I'équation dépend évidemment des hypothèses faites sur la loi du processus. Donnons quelques exemples :

a) M_t est une chaîne de Markov à nombre fini d'états $M^1,...,M^k$. Chercher 4 revient alors à chercher k vecteurs prix $p^1,...,p^k$, tels que

$$\forall i, \quad Z(p^i ; p^1,...,p^k , \pi^i) = 0$$

où a^i est la $i^{ème}$ ligne de la matrice de probabilités de transition du processus (intuitivement π^{ij} est la probabilité d'avoir demain l'état M^j, donc le prix p^j, sachant que l'état actuel est M^i).

Pour une matrice π donnée, le problème se ramène donc à la recherche des zéros de la fonction $Z_\pi : R_+^{kL} \to R^{kL}$

$$(p_1,...,p^k) \to (Z(p_1 ; p, \pi^1), ... , Z(p^k ; p, \pi^k)) .$$

Notons, cependant, qu'un zéro trivial est le prix d'équilibre stationnaire $\bar{p}$; on cherche donc à quelles conditions cette solution n'est pas unique. Les outils les plus naturels sont ceux de la topologie différentielle (théorèmes de l'indice,...) ; de plus, on peut étudier alors les bifurcations éventuelles de l'ensemble de solutions, lorsque l'on modifie continûment, soit la matrice a, soit les paramètres du modèle.

b) M_t est un processus markovien à ensemble d'états dénombrable $\mathcal{M} = \{M^k/k \in Z\}$. Pour fixer les idées, considérons le processus le plus simple :

$$P(M_{t+1} = M^{k+1}/M_t = M^k) = \pi , \quad P(M_{t+1} = M^{k-1}/M_t = M^k) = 1 - \pi$$

(intuitivement : après l'état M^k, le processus ne peut prendre que l'un des deux états voisins, avec une probabilité indépendante de k). La relation d'autoréalisation deviendra, avec des notations évidentes

$$\forall\, k \in Z, \quad Z(p^k ; p^{k+1}, p^{k-1}, \pi, 1-\pi) = 0$$

et la recherche de ϕ (définie par $p^k = \phi(M^k)$) se ramène donc à l'étude d'un *système dynamique.*

c) M_t est un processus à support continu. On parvient alors à une équation fonctionnelle complexe. Par exemple, posons $M_{t+1}=x_{t+1} . M_t$, où les (x_t) sont des variables aléatoires iid. Sous des hypothèses simplificatrices sur la fonction Z, on peut en particulier se ramener à une équation du type :

$$M \qquad G(\phi(M)) = E[\phi(Mx)]$$

où x est une variable aléatoire et G une fonction donnée, déduite de Z.

En conclusion, on peut souligner les points suivants :

- l'étude des modèles à anticipations rationnelles est un domaine neuf (la plupart des articles datent de 10, voire 5 ans) et en plein essor ;

- les mathématiques impliquées sont complexes, et touchent des domaines divers (topologie différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, probabilités, théorie des bifurcations,...) ;

- les enjeux sont importants, il s'agit non seulement d'expliquer certaines fluctuations macro-économiques, mais aussi de mieux comprendre les phénomènes d'autoréalisation déstabilisante sur certains marchés (changes, marchés financiers, etc...).

Références

Azariadis, C. et R. Guesnerie - "Sunspots and Cycles", *Review of Economic Studies* (1986), pp. 787-806.

Chiappori, P.A. et R. Guesnerie - "Endogenous Fluctuations under rational Expectations", *European Economic Review* (1988), à paraître.

Chiappori, P.A. et R. Guesnerie - "On Stationary Sunspots of Order k", Mimeo, LEP, E.N.S., (1968).

Grandmont, J.M. - "On Endogenous Competitive Business Cycles", *Econonzetrica*, (1985), pp. 995-1047.

Guesnerie, R. - "Stationary Sunspots Equilibria in a N-commodity World", *Journal of Economic Theory* (1986), pp. 103-128.

Numéro spécial du *Journal of Ecortomic Theory* (Vol. *40*, 1986).